



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA  
**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

# **RADIAÇÃO HAWKING DE UM BURACO NEGRO ACÚSTICO NÃO-COMUTATIVO**

**Gabriela Coutinho Luna**

CAMPINA GRANDE

- Fevereiro 2016 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**RADIAÇÃO HAWKING DE UM BURACO  
NEGRO ACÚSTICO NÃO-COMUTATIVO**

**Gabriela Coutinho Luna**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Antonio Anacleto

CAMPINA GRANDE

- Fevereiro 2016 -

L961r      Luna, Gabriela Coutinho.  
              Radiação Hawking de um buraco negro acústico não-comutativo /  
              Gabriela Coutinho Luna. – Campina Grande, 2017.  
              61 f.

              Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina  
              Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2017.  
              "Orientação: Prof. Dr. Marcos Antonio Anacleto".  
              Referências.

              1. Cosmologia – Buracos Negros. 2. Radiação Hawking. 3. Buraco  
              Negro Acústico. 4. Princípio da Incerteza Generalizado. I. Anacleto,  
              Marcos Antonio. II. Título.

CDU 524.882(043)

# RADIAÇÃO HAWKING DE UM BURACO NEGRO ACÚSTICO NÃO-COMUTATIVO

GABRIELA COUTINHO LUNA

Aprovada em \_\_\_\_\_

## BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Marcos Antonio Anacleto  
Orientador

---

Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly  
Co-orientador

---

Prof. Dr. Fabio Cabral Carvalho  
Examinador Externo

---

Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito  
Examinador Interno

*”Dedico esta dissertação a minha  
família”*

# Agradecimentos

Primeiramente a Deus por ter me abençoado com saúde e inteligência para concluir mais uma etapa dos meus estudos. Ele sempre me leva a realização dos meus sonhos e sou muito grata a Ele por isso!

Ao meu orientador, Marcos Anacleto, por toda paciência durante esses dois anos de mestrado, por ser tão disponível e por sua boa vontade em me ensinar.

Ao meu co-orientador, Jean Spinelly, que à sete anos vem me acompanhando como amigo e professor. Agradeço por ter se disposto a aprender sobre modelos análogos a fim de me ajudar na produção deste trabalho e por toda ajuda tanto nos estudos quanto na vida pessoal. É um grande amigo que a física me deu de presente!

Aos meus pais, Valter e Luciene, pois me deram uma educação muito sólida. Me ensinaram que não se consegue nada fácil e o melhor caminho para ter um bom futuro é estudando. Grande parte da influência de eu ter chegado até aqui vem dos ensinamentos deles e eu serei eternamente grata aos dois por isso. Obrigada também por todo incentivo e cuidado!

A minha irmã, Emanuela, por todo incentivo e por acreditar tanto que sou capaz de alcançar meus objetivos.

Ao meu namorado, Thallis Dantas, por não medir esforços para me ajudar, por me incentivar bastante na carreira acadêmica, por acreditar que chegarei em degraus mais altos e por todas as orações intercedendo pelo meu sucesso.

A todos os meus familiares, avós, tias(os) e primas(os), por todo incentivo e por celebrarem com tanta alegria as minhas conquistas.

A minha amiga Victória Santiago, que além de todo incentivo me ajudou com o abstract.

Aos meus amigos, Arthur Cavalcante e Wagner Almeida, pela amizade durante o mestrado, pelos momentos em que nos ajudamos tirando dúvidas e pelos momentos de

descontração.

Aos meus alunos de estágio, que não tenho como nomear um a um aqui, por terem contribuído para minha formação de professora. Eles me mostraram que ser professora é realmente a minha vocação profissional.

A todos os professores do departamento de física, que contribuíram direta ou indiretamente para minha formação acadêmica.

A todos que contribuíram para minha formação.

# Sumário

Agradecimentos	v
Sumário	viii
Resumo	ix
Abstract	x
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Buraco negro acústico</b>	<b>5</b>
2.1 Caso não relativístico . . . . .	8
2.1.1 Cálculo da métrica acústica não relativística a partir da lagrangeana	13
2.2 Caso Relativístico . . . . .	15
2.3 Radiação Hawking . . . . .	18
2.3.1 Cálculo da temperatura Hawking para o caso não relativístico . . .	20
2.3.2 Cálculo da temperatura Hawking para o caso relativístico . . . . .	21
2.4 Relação de dispersão . . . . .	22
<b>3 Não-comutatividade</b>	<b>24</b>
3.1 O problema de Landau . . . . .	25
3.2 O espaço-tempo não-comutativo . . . . .	28
3.2.1 O produto Moyal . . . . .	28
3.3 Métrica acústica não-comutativa . . . . .	31
3.4 Temperatura Hawking . . . . .	35
3.5 Relação de dispersão . . . . .	37



<b>4</b>	<b>Cálculo da temperatura Hawking e da entropia em um espaço-tempo não-comutativo</b>	<b>40</b>
4.1	Setor magnético puro . . . . .	41
4.1.1	A entropia estatística . . . . .	45
4.2	Setor elétrico puro . . . . .	49
4.2.1	A entropia estatística . . . . .	51
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>55</b>

# Resumo

O estudo do buraco negro acústico, ou análogo acústico, se assemelha ao gravitacional da seguinte forma: verifica-se o fenômeno da radiação Hawking, a presença de um horizonte de eventos, a possibilidade de se calcular a sua temperatura, também chamada de temperatura Hawking, e obtêm-se uma métrica que descreve a geometria do buraco negro. Inserimos na métrica acústica a teoria não-comutativa, a fim de verificar as correções que resultam desta teoria. Neste trabalho, consideramos o princípio da incerteza generalizado, no formalismo de tunelamento via método de Hamilton-Jacobi, para determinar a temperatura Hawking e a entropia quântica corrigida para buracos negros acústicos não comutativos em  $2 + 1$  dimensões. Em nossos resultados obtemos uma entropia de área, com um termo de correção logarítmica em ordem dominante; um termo, em ordem menor, proporcional à temperatura de radiação associada com os buracos negros acústicos comutativos; e um termo extra que depende de uma carga conservada. Assim, como no caso gravitacional, não há necessidade de apresentar o corte ultravioleta e as divergências são eliminadas.

Palavras-chave: Buraco negro acústico, radiação Hawking, não-comutatividade, princípio da incerteza generalizado

# Abstract

Acoustic black hole study resembles the gravitational black hole as follows: we verify Hawking radiation phenomenon, the presence of an event horizon, the possibility to calculate its temperature, also known as Hawking temperature, and we obtain a metric that describes the black hole geometry. We insert in the acoustic metric theory the noncommutative theory in order to verify the corrections that result from this theory. In this study, we consider the generalized uncertainty principle in tunneling formalism by Hamilton-Jacobi method to determine Hawking temperature and quantum entropy corrected for noncommutative acoustic black holes in  $2 + 1$  dimensions. In our results, we obtain an entropy area with a term of logarithmic correction in ruling order; a term, in a smaller order, proportional to the radiation temperature associated with the commutative acoustic black holes; and an extra term that depends on a conserved charge. Thus, as in the gravitational case, there is no need to present the ultraviolet cut-off and differences are eliminated.

Keywords: Acoustic black hole, Hawking radiation, noncommutative, generalized uncertainty principle

# Capítulo 1

## Introdução

Análogo acústico de buracos negros, ou buracos negros acústico, como é mais comumente chamado, é uma área da física que vem sendo estudada desde a década de 80, tendo início com William George Unruh (UNRUH, 1981). Tais objetos são formados quando uma onda sonora se propaga através de um fluido em movimento à uma velocidade acima da velocidade do som. Daí, forma-se uma região conhecida como horizonte de eventos acústico, donde, a partir dela, o som não é capaz de escapar. Quando isto acontece, observa-se que estas ondas sonoras se comportam no fluido, como a luz se comporta sob a influência do campo gravitacional. Esta é a analogia com o caso gravitacional. Nesse momento, consegue-se observar as mesmas características do buraco negro usual no acústico.

O interesse pelo estudo deste tipo de buraco negro se deu com o objetivo de estudar o fenômeno da radiação Hawking e outros fenômenos para entender a gravidade quântica. Assim, muitos sistemas de fluidos têm sido investigados em uma variedade de modelos análogos de buracos negros, incluindo ondas gravitacionais (SCHÜTZHOLD e UNRUH, 2002), água (ROUSSEAU, 2008), luz lenta (LEONHARDT e PIWNICKI, 2000; LEONHARDT, 2002; SCHÜTZHOLD e UNRUH, 2003) fibra óptica (PHILBIN, 2008) e guias de onda eletromagnética (SCHÜTZHOLD e UNRUH, 2005). Os modelos de superfluido de Helio II (NOVELLO et al., 2002), condensados de Bose-Einstein (GARAY et al., 2000 e LAHAV et al., 2009) e gás degenerado de Fermi (GIOVANAZZI, 2005) têm sido propostos para criar uma geometria de buraco negro acústico em laboratórios. Uma versão relativista de buracos negros acústicos foi apresentado em (GE e SIN, 2010; BILIC, 1999; FAGNOCCI, 2010; VISSER e MOLINA, 2010).

Com relação a radiação emitida por um buraco negro acústico, verificou-se que na região conhecida por horizonte de eventos, pares de partículas, chamadas de fônons <sup>1</sup>, são criadas; sendo uma absorvida e outra emitida. A partícula emitida é responsável pela radiação do modelo acústico. Esta emissão de radiação ocorre de maneira semelhante ao espectro de radiação de um corpo negro, um dos motivos deste objeto receber o nome buraco negro. Tal radiação está associada a temperatura Hawking, tendo este nome por ter sido descoberta por Stephen Hawking (HAWKING, 1974).

Existem várias abordagens para obter a Temperatura Hawking e a entropia para buracos negros. Um deles é o Método de Hamilton-Jacobi, que é baseado no trabalho de Padmanabhan e colaboradores (SRINIVASAN e PADMANABHAN, 1999; SHANKARANARAYANAN et al., 2001; SHANKARANARAYANAN et al., 2002), onde os efeitos da auto-gravitação da partícula são descartados. Desta forma, o método utiliza a aproximação WKB, no formalismo do tunelamento, para o cálculo da parte imaginária da ação. Os autores Banerjee e Majhi analisaram a radiação Hawking considerando a auto-gravitação e os efeitos causados pelo formalismo do tunelamento (BENERJEE e MAJHI, 2008). Silva e Brito também analisaram estes mesmos efeitos para o buraco negro auto-dual (SILVA e BRITO, 2013).

O cálculo da entropia do buraco negro foi primeiro realizado por G.'t Hooft. Ele usou o método parede de tijolo, no qual esta entropia é referente apenas a entropia de campos quânticos fora do horizonte de eventos. No entanto, quando se calcula a entropia estatística do buraco negro por este método, para evitar a divergência de densidade de estados perto do horizonte, um cut-off ultravioleta deve ser introduzido. Outra idéia relacionada, a fim de contornar as divergências é a de considerar modelos em que a relação de incerteza de Heisenberg é modificado, por exemplo, em um espaço tridimensional, como

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} (1 + \alpha^2 (\Delta p)^2),$$

a qual mostra que existe um comprimento mínimo  $\Delta x \geq \hbar \alpha$ , onde  $\Delta x$  e  $\Delta p$  são incertezas para a posição e o momento, respectivamente, e  $\alpha$  é uma constante positiva independente

---

<sup>1</sup> Quando a temperatura se aproxima do zero absoluto, temos que o som se comporta como partículas quânticas, que recebem o nome de fônons. Derivado do grego *phone*, o nome fônon quer dizer som, voz. A sua velocidade varia, e assim também seu comprimento de onda, quando se move em um fluido com velocidade não uniforme. Os fônons são bósons com spin zero, que são encontrados experimentalmente em substâncias de fluidos e em cristais à uma temperatura consideravelmente baixa (JACOBSON E PARENTANI, 2005).

de  $\Delta x$  e  $\Delta p$ . A relação de comutação para o princípio da incerteza generalizado (GUP) pode ser escrita como  $[x, p]_{GUP} = i\hbar(1 + \alpha^2 p^2)$ , onde  $x$  e  $p$  são os operadores posição e momento, respectivamente. Assim, usando a relação de incerteza de Heisenberg modificada a divergência no modelo parede de tijolo são eliminados, como discutida por Brustein e Judy Kupferman em 2011.

Uma outra teoria importante no desenvolvimento deste trabalho é a não-comutativa. Nesta teoria, temos que as coordenadas do espaço-tempo,  $X^\mu$ , passam a ser operadores hermitianos,  $\hat{X}^\mu$ , que não comutam entre si. Assim, passamos a ter uma relação de comutação entre elas, que é dada por

$$[\hat{X}^\mu, \hat{X}^\nu] = i\theta^{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

onde  $\theta^{\mu\nu}$  é o parâmetro de não-comutatividade. Com o uso de coordenadas não-comutativas surge a necessidade de modificar as características do espaço-tempo, passamos a ter um espaço-tempo com operações básicas diferentes. A multiplicação de dois campos, por exemplo, deixa de ser um simples produto e passa a ser calculado com o uso do produto moyal.

Nesta dissertação, inspirada por todos estes trabalhos anteriores, aplicamos a métrica não-comutativa do buraco negro acústico, obtida a partir de um fluido relativista, para estudar a entropia do modelo análogo acústico. Considerando que nosso objetivo é verificar as correções na temperatura Hawking e na entropia devido a não-comutatividade e ver se usando o princípio da incerteza generalizado, no formalismo de tunelamento via o método de Hamilton-Jacobi, divergências são eliminados como no caso gravitacional.

Este trabalho está organizado como segue. No capítulo 2, fazemos uma breve revisão sobre buracos negros acústicos, mostrando que após considerar um fluido em movimento com uma onda sonora passando por ele, podemos obter uma métrica acústica que se assemelha a métrica de um buraco negro. E assim, fazemos isso para o caso não relativístico e o relativístico. Calculamos a temperatura Hawking para ambas as situações e, por fim, determinamos a relação de dispersão.

No capítulo 3, unimos a física dos buracos negros acústicos ao conceito de não-comutatividade. Neste capítulo, Repetimos todos os cálculos feitos no primeiro, a fim de verificar quais as correções que a não-comutatividade trás para o cálculo da temperatura Hawking e para a relação de dispersão. Tais correções são expressas em termos de  $\theta$ . É importante deixar evidenciado que devido o parâmetro  $\theta$  ser muito pequeno comparado a

unidade, fazemos expansões onde consideramos apenas os termos em primeira ordem.

Por fim, no capítulo 4, está a nossa contribuição para o estudo da temperatura Hawking e entropia, devido as correções quânticas obtidas por meio do princípio da incerteza generalizado (ANACLETO et al., 2015). Neste trabalho consideramos a métrica acústica relativística com o efeito da não-comutatividade e utilizamos o método do tunelamento para o cálculo da temperatura Hawking acústica. Este método consiste em calcular a temperatura Hawking considerando a probabilidade de uma partícula emitida no horizonte de eventos tunelar. Para tanto, usamos o método de Hamilton-Jacobi, pois este nos permite resolver equações de movimento de maneira simplificada. Separamos a métrica em dois setores, o elétrico puro e o magnético puro, para calcular a temperatura Hawking em cada um. Feito os cálculos, comparamos os resultados obtidos com os do capítulo 3, no intuito de verificar a precisão do método de tunelamento. Para os dois setores calculamos, também, correções para a entropia, através do princípio da incerteza generalizado.

## Capítulo 2

# Buraco negro acústico

A teoria da relatividade geral, proposta por Einstein em 1915, leva em consideração as idéias descobertas na relatividade restrita, que espaço e tempo não são mais quantidades absolutas, e generaliza o princípio da relatividade do movimento de referenciais em movimento uniforme, para a relatividade do movimento entre referenciais com movimento acelerado. Tal generalização tem implicações profundas no nosso conhecimento do espaço-tempo, levando, entre outras conclusões, à de que matéria e energia curvam o espaço-tempo à sua volta. Isto é, a gravitação é um efeito da geometria do espaço-tempo. Esta relação entre matéria e energia é descrita pela equação de campo de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = kT_{\mu\nu}$$

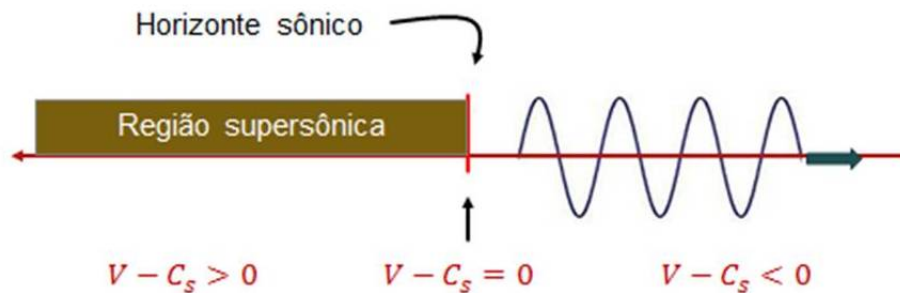
onde  $T_{\mu\nu}$  é o tensor energia momento,  $R$  é o escalar de curvatura de Ricci,  $R_{\mu\nu}$  é o tensor de Ricci e  $k = 8\pi G/c^4$  é a constante gravitacional. Os buracos negros são soluções dessa equação. E a mais simples encontrada é a do buraco negro de Schwarzschild, por ser estático e não possuir carga.

Estudando a formação das estrelas, vemos que elas passam por estágios de formação, e quando essas estão em seu estágio final, sofrem, em sua região central, um colapso gravitacional. Este colapso resulta em uma forte explosão. Considerando estrelas gigantes, com 10 massas solares, temos que a explosão pode destruir completamente a estrela, ou deixar estrelas residuais, chamadas de estrelas de nêutrons. Pode acontecer da massa dessa estrela residual ainda ser muito grande e ela continuar a colapsar, quando isso ocorre formam-se buracos negros. Tais objetos são caracterizados por possuir um horizonte de eventos, no qual, a partir dessa região informação nenhuma pode escapar, nem mesmo a luz (SUSSKIND e LINDESAY, 2005).



O buraco negro acústico é um sistema análogo ao buraco negro gravitacional. Porém, diferentemente do caso gravitacional, este modelo é formado quando o fluido atinge uma velocidade supersônica (velocidade maior que a do som). No momento que isto acontece cria-se uma região chamada de horizonte de eventos acústico e, assim, as ondas sonoras, que estiverem nessa região, não conseguem escapar, formando então um buraco negro acústico. Este modelo foi primeiramente estudado por Willian George Unruh com o objetivo de entender a radiação Hawking (UNRUH, 1981). Podemos observar isto, graficamente, através da figura 1:

**FIGURA 1: BURACO NEGRO ACÚSTICO**



Imagine o fluido como sendo representado pela seta vermelha e o som pela onda azul, a medida que a onda sonora interage com o fluido em movimento podemos criar três regiões diferentes, sendo elas as seguintes:

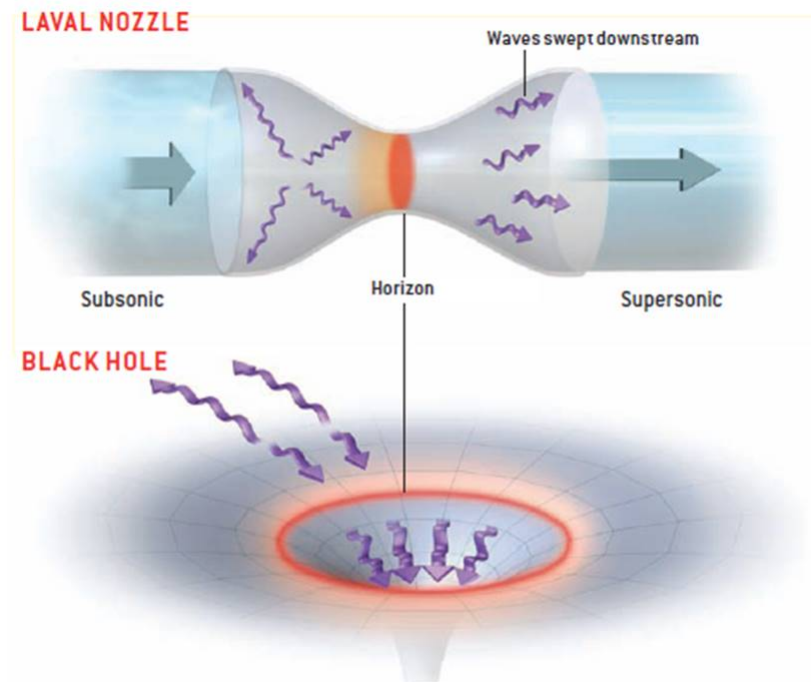
**I. Região supersônica-** temos que uma região supersônica é criada se a velocidade do fluido  $v$  for maior que a velocidade do som  $c_s$ , esta região é a interna do buraco negro acústico, donde dela nem mesmo o som escapa.

**II. Horizonte sônico-** Um horizonte sônico, ou acústico, é criado quando a onda sonora interage com o fluido, ambos se movendo com a mesma velocidade. Esta região delimita o interior do exterior do buraco negro acústico. Qualquer onda sonora que se aproxime desta região será capturada para o interior do buraco negro.

**III. Região subsônica-** A região externa do buraco negro recebe o nome de região subsônica, pois é criada quando o fluido interage com o som a uma velocidade subsônica (velocidade menor que a do som). Nesta região pode-se sentir a presença das ondas sonoras, diferentemente da região supersônica.

Podemos criar um buraco negro acústico usando um bocal convergente-divergente, mais comumente chamado de bocal de Laval. O bocal é um instrumento que acelera o escoamento de velocidades subsônicas para supersônicas no ponto mais estreito sem alterar as propriedades do fluido (JACOBSON E PARENTANI, 2015).

**FIGURA 2: BOCAL DE LAVAL**



Fonte: Jacobison e Parentani (2005, p. 73)

Observe, na figura acima, uma comparação entre o buraco negro acústico e o gravitacional. A região supersônica corresponde ao interior do buraco negro acústico, a subsônica, por sua vez, corresponde ao exterior. E a região intermediária entre essas duas é o horizonte sônico. Quando ondas eletromagnéticas se aproximam da região de horizonte do buraco negro, temos que estas são sugadas para seu interior. Da mesma forma ocorre com as ondas sonoras que passam próximo do horizonte de eventos acústico.

Para compreendermos este modelo análogo, utilizaremos as ferramentas matemáticas da relatividade geral através de uma métrica efetiva (geometria acústica) e também algumas equações importantes de fluidos (física acústica).

Neste capítulo, faremos uma revisão sobre buracos negros acústicos, para os casos não-relativístico e relativístico, e também sobre radiação Hawking, com o objetivo de calcular a temperatura Hawking e a relação de dispersão, em ambas as situações.

## 2.1 Caso não relativístico

Nosso proposito nesta seção é descrever o buraco negro acústico a partir da propagação de uma onda sonora em um fluido ideal.

As principais equações para o estudo de fluidos são a de continuidade e a de Euler. A primeira é utilizada para estudar movimento de matéria contínua; enquanto que a segunda é usada para descrever o movimento de fluidos ideais. Tais equações são dadas, respectivamente, por (SIMON, 1996):

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.1)$$

e

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} \equiv \rho \left[ \partial_t \vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = \vec{f}, \quad (2.2)$$

onde  $\vec{f} = -\vec{\nabla} p$  é a densidade de força por unidade de volume,  $\rho$  é a densidade do fluido e  $v$  a velocidade.

Quando estudamos buracos negros acústicos, consideramos fluidos ideais, ou seja, fluidos irrotacionais, não viscosos e barotrópicos. O fato do fluido ser irrotacional,  $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$ , nos permite escrever a velocidade como sendo o gradiente de um potencial velocidade  $\vec{v} = -\vec{\nabla} \phi$ . Por outro lado, por ser barotrópico, o que significa que a densidade do fluido depende apenas na pressão, podemos escrever a entalpia como:

$$h(p) = \int_0^p \frac{dp'}{\rho(p')}, \quad (2.3)$$

ou ainda

$$\vec{\nabla} h = \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p. \quad (2.4)$$

Nosso primeiro objetivo, neste capítulo, é obter uma equação de onda para o potencial velocidade. Para tanto, devemos partir da equação de Euler, levando em conta que o fluido é ideal. De fato, fazendo isso e usando a propriedade

$$\vec{\nabla} (\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}), \quad (2.5)$$

temos que a equação de Euler se reduz a

$$-\partial_t \phi + h + \frac{1}{2} \left( \vec{\nabla} \phi \right)^2 = 0. \quad (2.6)$$

Um fato conhecido é que as ondas sonoras produzem alterações nas características do meio em que se propaga. Dito de outra forma, a presença dessas ondas induz variações nas densidade, pressão e velocidade das partículas que constituem o fluido. Do ponto de vista matemático, tais ondas são descritas como sendo uma perturbação linear das variáveis dinâmicas,  $(\rho, p, \phi)$ , o que nos leva, na prática, a escrevê-las como segue:

$$\rho = \rho_0 + \varepsilon \rho_1 + \vartheta \left( \varepsilon^2 \right), \quad (2.7)$$

$$p = p_0 + \varepsilon p_1 + \vartheta \left( \varepsilon^2 \right), \quad (2.8)$$

$$\phi = \phi_0 + \varepsilon \phi_1 + \vartheta \left( \varepsilon^2 \right). \quad (2.9)$$

onde o índice 0 indica as quantidades sem perturbação e o índice 1, as quantidades com perturbações em primeira ordem em  $\varepsilon$ . Admitindo que uma onda sonora se propaga através do fluido, devemos efetuar uma perturbação linear nas equações da continuidade e Euler. Isto é, substituindo (2.7) em (2.1), obtemos:

$$\partial_t \rho_0 + \vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{v}_0) = 0 \quad (2.10)$$

e

$$\partial_t \rho_1 + \vec{\nabla} \cdot (\rho_1 \vec{v}_0 + \rho_0 \vec{v}_1) = 0. \quad (2.11)$$

Por outro lado, usando (2.8), fazendo uma expansão em série de Taylor e levando em conta a condição barotrópica, a entalpia assume a seguinte forma:

$$h(p) = h(p_0 + \varepsilon p_1 + \vartheta(\varepsilon^2)) = h_0 + \varepsilon \frac{p_1}{\rho_0} + \vartheta(\varepsilon^2). \quad (2.12)$$

De posse desse resultado, ao realizarmos a perturbação linear na equação de Euler, encontramos:

$$-\partial_t \phi_0 + h_0 + \frac{1}{2} \left( \vec{\nabla} \phi_0 \right)^2 = 0 \quad (2.13)$$

e

$$-\partial_t \phi_1 + \frac{p_1}{\rho_0} - \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \phi_1 = 0. \quad (2.14)$$

Da equação (2.14), segue que

$$p_1 = \rho_0 \left( \partial_t \phi_1 + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \phi_1 \right), \quad (2.15)$$

e da condição barotrópica,  $\rho = \rho(p)$ , se expandirmos em torno de  $p = p_0$ , teremos

$$\rho(p) = \rho(p_0) + \frac{\partial \rho(p - p_0)}{\partial p} + \dots = \rho_0 + \frac{\partial \rho(\varepsilon p_1)}{\partial p}, \quad (2.16)$$

que se compararmos com a equação de perturbação para  $\rho$ , (2.7), obtemos o seguinte:

$$\rho_1 = \frac{\partial \rho}{\partial p} p_1, \quad (2.17)$$

substituindo uma na outra, obtemos

$$\rho_1 = \frac{\partial \rho}{\partial p} p_0 \left( \partial_t \phi_1 + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \phi_1 \right). \quad (2.18)$$

Com isto, podemos reescrever a equação da continuidade. Para tanto, basta substituir (2.18) em (2.11)

$$-\partial_t \left[ \frac{\partial \rho}{\partial p} \rho_0 \left( \partial_t \phi_1 + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \phi_1 \right) \right] + \vec{\nabla} \cdot \left[ \rho_0 \vec{\nabla} \phi_1 - \frac{\partial \rho}{\partial p} \rho_0 \left( \partial_t \phi_1 + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \phi_1 \right) \vec{v}_0 \right] = 0. \quad (2.19)$$

A equação da onda encontrada acima descreve a propagação do potencial velocidade. Observe que a mesma possui a equação (2.15), que determina  $p_1$ , e (2.17), que determina  $\rho_1$ . Portanto, ela descreve completamente a propagação das perturbações acústicas (VISSER, 1998; TONIATO, 2010). Comparando a equação encontrada acima com a equação da onda,

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi(\vec{x}, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi(\vec{x}, t)}{\partial \vec{x}^2} = 0, \quad (2.20)$$

identificamos a velocidade local do som como segue:

$$c_s^{-2} \equiv \frac{\partial \rho}{\partial p}. \quad (2.21)$$

De modo geral, quando o fluido é barotrópico, irrotacional e não viscoso, ou seja, quando ele é ideal, a equação descrita pelo potencial velocidade, numa perturbação acústica, é semelhante a equação de Klein-Gordon no espaço curvo de um campo escalar sem massa, acoplado minimamente a um campo gravitacional, em (3+1) dimensões na geometria lorentziana (VISSER, 1998)

$$\Delta \phi \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left( \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \right) = 0. \quad (2.22)$$

Visto isto, nosso próximo objetivo é escrever a propagação acústica segundo o formalismo da relatividade geral, no qual a propagação do som é governada por uma métrica acústica, que é função da densidade  $\rho$ , da velocidade local do som  $c_s$  e da velocidade do fluido  $v$

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -(c_s^2 - v^2) & \vdots & -v^T \\ \cdots & & \cdots \\ -v & \vdots & I \end{bmatrix}, \quad (2.23)$$

mas, para isto, primeiro construiremos a matriz  $f_{\mu\nu}$ , para a partir dela, encontrar a métrica (BARCELÓ, LIBETARI e VISSER, 2011). Podemos montar a matriz que representa  $f_{\mu\nu}$ , usando a equação (2.19), como segue:

$$f^{\mu\nu}(t, \vec{x}) \equiv \frac{\rho_0}{c_s^2} \begin{bmatrix} -1 & \vdots & -v_0^j \\ \cdots & & \cdots \\ -v_0^i & \vdots & (c_s^2 \delta^{ij} - v_0^i v_0^j) \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

onde os índices gregos variam de 0 a 3 e os índices romanos de 1 a 3. Para isto, comparamos termo a termo da equação (2.19) com a equação (2.22).

Dessa forma, utilizando um espaço-tempo de coordenadas em  $3 + 1$  dimensões, onde  $x^\mu \equiv (t, x^i)$ , podemos escrever a equação da onda como

$$\partial_\mu (f^{\mu\nu} \partial_\nu \phi_1) = 0, \quad (2.25)$$

tal equação é equivalente a (2.19). Comparando (2.25) com o (2.22), vemos que

$$\sqrt{-g} g^{\mu\nu} = f^{\mu\nu}, \quad (2.26)$$

e ainda usando o fato que  $g \equiv \det(g_{\mu\nu})$ , obtemos da equação anterior que

$$\det(f^{\mu\nu}) = (\sqrt{-g})^4 g^{-1} = g. \quad (2.27)$$

Por outro lado, calculando o determinante da equação (2.24), temos que

$$\det(f^{\mu\nu}) = -\frac{\rho_0^4}{c_s^2}. \quad (2.28)$$

Assim, comparando (2.27) com (2.28), obtemos

$$g = -\frac{\rho_0^4}{c_s^2}, \quad \sqrt{-g} = \frac{\rho_0^2}{c_s}. \quad (2.29)$$

Tendo isto, podemos encontrar a matriz dos coeficientes da métrica contravariante

$$g^{\mu\nu}(t, \vec{x}) \equiv \frac{1}{\rho_0 c_s} \begin{bmatrix} -1 & \vdots & -v_0^j \\ \cdots & & \cdots \\ -v_0^i & \vdots & (c_s^2 \delta^{ij} - v_0^i v_0^j) \end{bmatrix}, \quad (2.30)$$

e, calculando sua matriz inversa, chegamos a métrica covariante. Porém, para calcular a inversa de  $g^{\mu\nu}$ , precisamos escrevê-la na forma  $(4 \times 4)$ . Assim, da matriz acima, temos que

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{\rho_0 c_s} \begin{bmatrix} -1 & -v_{0x} & -v_{0y} & -v_{0z} \\ -v_{0x} & c_s^2 - (v_{0x})^2 & -v_{0x}v_{0y} & -v_{0x}v_{0z} \\ -v_{0y} & -v_{0y}v_{0x} & c_s^2 - (v_{0y})^2 & v_{0y}v_{0z} \\ -v_{0z} & -v_{0z}v_{0x} & -v_{0z}v_{0y} & c_s^2 - (v_{0z})^2 \end{bmatrix};$$

portanto, a inversa é

$$g_{\mu\nu}(t, \vec{x}) \equiv \frac{\rho_0}{c_s} \begin{bmatrix} -(c_s^2 - v_0^2) & \vdots & -v_0^j \\ \cdots & & \cdots \\ -v_0^i & \vdots & \delta^{ij} \end{bmatrix}, \quad (2.31)$$

que na forma  $4 \times 4$  é escrita como

$$g_{\mu\nu}(t, \vec{x}) \equiv \frac{\rho_0}{c_s} \begin{bmatrix} -(c_s^2 - v_0^2) & -v_{0x} & -v_{0y} & -v_{0z} \\ -v_{0x} & 1 & 0 & 0 \\ -v_{0y} & 0 & 1 & 0 \\ -v_{0z} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

o que é equivalente a escrever o elemento de linha acústico, como sendo

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \frac{\rho_0}{c_s} [-c_s^2 dt^2 + (dx^i - v_0^i dt) \delta_{ij} (dx^j - v_0^j dt)]. \quad (2.33)$$

Note que, a métrica obtida possui uma assinatura assim como a métrica para a geometria Rimanneana  $(-, +, +, +)$ . Devemos entender que nosso sistema físico é um fluido se movendo em um espaço plano, porém, quando o som interage com o fluido, ele sente efeitos de um espaço curvo. Por isso, partimos das equações que descrevem a dinâmica dos fluidos para o espaço plano e obtivemos uma métrica acústica para um espaço curvo. Em outras palavras, o fluido age no som como a massa age sobre a luz.

Obtida a métrica acústica, podemos escrevê-la na forma da métrica de Schwarzschild, pois toda analogia acústica é fundamentada neste tipo de buraco negro. Para tanto, colocamos  $-(c_s^2 - v^2)$  em evidência e completamos o quadrado perfeito, assim podemos reescrever o elemento de linha como segue

$$ds^2 = \frac{\rho_0}{c_s} \left[ -(c_s^2 - v_0^2) d\tau^2 + \frac{\vec{v}_0 \cdot d\vec{x}}{(c_s^2 - v_0^2)} + d\vec{x}^2 \right], \quad (2.34)$$

onde  $d\tau$  é uma nova coordenada, dada por

$$d\tau = dt + \frac{(\vec{v}_0 \cdot d\vec{x})}{c_s^2 - v_0^2}. \quad (2.35)$$

Observe que, ao fazermos essa mudança de coordenadas, transformamos a métrica acústica encontrada em (2.33) em uma métrica estacionária, visto que eliminamos os termos cruzados entre as coordenadas temporais e espaciais (TONIATO, 2010). Mais adiante, quando formos calcular a temperatura Hawking acústica, precisaremos desta transformação para a métrica de Schwarzschild.

### 2.1.1 Cálculo da métrica acústica não relativística a partir da lagrangeana

Até então, o que fizemos, neste capítulo, foi descrever um buraco negro acústico a partir da propagação sonora em um fluido ideal. Contudo, esta não é a única forma de obtermos a métrica (2.33). Uma outra maneira, é partir da densidade lagrangiana não relativística, a que tem por solução a equação de Schrodinger, e escrever o potencial escalar em termos de quantidades hidrodinâmicas. Com isso, conseguimos encontrar as equações de movimento e obter a métrica. Faremos isto detalhadamente na presente subseção. A lagrangeana não relativística que usaremos é dada por:

$$\mathcal{L} = i\phi^* \partial_0 \phi - \frac{1}{2m} \partial_j \phi^* \partial^j \phi + b(\phi\phi^*)^2. \quad (2.36)$$

Como nosso modelo é acústico, iremos escrever o potencial  $\phi$  em função de variáveis hidrodinâmicas, tal aproximação é conhecida como aproximação Madelung (PASHAEV E LEE, 2001). O potencial, por sua vez, é escrito da seguinte maneira:

$$\phi = \sqrt{\rho(\vec{x}, t)} e^{iS(\vec{x}, t)}, \quad (2.37)$$



sendo  $S$  a fase e  $\rho$  a densidade. Portanto, substituindo esse campo escalar na lagrangeana (3.37), teremos

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\partial_0\rho - \rho\partial_0S - \frac{1}{2m}\left(\frac{1}{4\rho}\partial_j\rho\partial^j\rho + \rho\partial_jS\partial^jS\right) + b\rho^2. \quad (2.38)$$

Dada a equação acima, devemos obter, a partir da equação de Euler-Lagrange, as equações de movimento para  $S$  e  $\rho$ . Assim, temos respectivamente, que as equações de movimento para estas quantidades são

$$\partial_j\left(\frac{\rho}{m}\partial^jS\right) - \partial_0\rho = 0 \quad (2.39)$$

e

$$-\frac{1}{2m}\frac{1}{\sqrt{\rho}}\partial_j\partial^j\sqrt{\rho} + \partial_0S + \frac{1}{2m}\partial_jS\partial^jS - 2b\rho = 0. \quad (2.40)$$

No entanto, o primeiro termo da equação anterior, que descreve a hidrodinâmica dos fluidos, é um termo de potencial quântico  $1/\sqrt{\rho}(\partial_\mu\partial^\mu\sqrt{\rho})$  que é negligenciado na região hidrodinâmica. Portanto devemos desconsiderá-lo (XIAN-RUI GE E SANG-JIN SIN,2010).

Por outro lado, vimos que, matematicamente, uma onda sonora pode ser representada através da perturbação das equações que descrevem a onda em um meio. Neste caso, tais equações são as de movimento. Logo, escrevendo  $S$  e  $\rho$  como segue

$$S = S_0 + \varepsilon S_1 + \vartheta(\varepsilon^2) \quad (2.41)$$

$$\rho = \rho_0 + \varepsilon\rho_1 + \vartheta(\varepsilon^2),$$

obtemos as equações perturbadas para a fase e para a densidade, dadas respectivamente por

$$\frac{1}{m}\partial_j(\rho_0\partial^jS_1 + \rho_1\partial^jS_0) - \partial_0\rho_1 = 0 \quad (2.42)$$

e

$$\partial_0S_1 + \frac{1}{m}(\partial_jS_0\partial^jS_1) - 2b\rho_1 = 0. \quad (2.43)$$

O próximo passo é isolar  $\rho_1$  na equação (2.43) e substituir em (2.42). Com isso, iremos obter uma equação de onda semelhante a (2.19). Feito isto, basta compará-la com a equação de Klein-Gordon para encontrar a métrica. Logo, da equação (2.43), temos que

$$\rho_1 = \frac{1}{2b}\left(\partial_0S_1 + \frac{1}{m}\partial_jS_0\partial^jS_1\right), \quad (2.44)$$

substituindo-a em (2.42), chegamos a

$$-\partial_0 \left\{ \frac{1}{2b} [\partial_0 S_1 + v_{0j} \partial^j S_1] \right\} + \partial_j \left\{ \frac{\rho_0}{m} \partial^j S_1 - v_0^j \left[ \frac{1}{2b} (\partial_0 S_1 + v_{0k} \partial^k S_1) \right] \right\} = 0, \quad (2.45)$$

onde  $v_{0j} = \partial_j S_0 / m$  é a velocidade. Colocando  $1/2b$  em evidência, na equação acima, podemos identificar a velocidade do som como sendo  $c_s^2 = 2b\rho_0$  (neste momento, redefinimos  $\rho_0/m = \rho$ ). Com isso, a equação de onda acima pode ser reescrita como

$$-\partial_0 \left\{ \frac{\rho_0}{c_s^2} [\partial_0 S_1 + v_{0j} \partial^j S_1] \right\} + \partial_j \left\{ \frac{\rho_0}{c_s^2} [c_s^2 \partial^j S_1 - v_0^j (\partial_0 S_1 + v_{0k} \partial^k S_1)] \right\} = 0, \quad (2.46)$$

ou ainda, escrevendo as derivadas como sendo o operador  $\nabla$ , temos

$$-\partial_0 \left\{ \frac{\rho_0}{c_s^2} [\partial_0 S_1 + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} S_1] \right\} + \vec{\nabla} \cdot \left\{ \frac{\rho_0}{c_s^2} [c_s^2 \vec{\nabla} S_1 - v_0 (\partial_0 S_1 + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} S_1)] \right\} = 0. \quad (2.47)$$

Note que encontramos uma equação de onda semelhante a (2.19), que foi obtida considerando a propagação de uma onda sonora em um fluido e que após alguns cálculos, que já foram mostrados anteriormente, gerou a seguinte métrica:

$$g_{\mu\nu}(t, \vec{x}) \equiv \frac{\rho_0}{c_s} \begin{bmatrix} -(c_s^2 - v_0^2) & \vdots & -v_0^j \\ \cdots & & \cdots \\ -v_0^i & \vdots & \delta^{ij} \end{bmatrix}. \quad (2.48)$$

Isto significa que a equação (2.47) resultará na mesma métrica acima, pois o caminho para obtê-la é o mesmo. Conseguimos então, como falado no início desta subseção, obter a métrica acústica partindo de uma lagrangeana não relativística.

## 2.2 Caso Relativístico

Nesta seção, iremos tratar do caso relativístico. Porém, diferentemente da parte inicial da seção anterior, não utilizaremos a equação de Euler e nem a equação da continuidade para obter a métrica. Ao invés disso, usaremos a lagrangeana, assim como foi feito na subseção (2.1.1). Contudo, neste caso usaremos a lagrangeana do modelo abeliano de Higgs, ou seja, o modelo do "chapéu mexicano" acoplado ao eletromagnetismo. Nesta equação, faremos uma aproximação para o potencial, escrevendo-o em termos das variáveis hidrodinâmicas, o que irá assegurar que nossa métrica é acústica. Após fazer esta aproximação, encontraremos as equações de movimento e a partir delas determinaremos a métrica acústica relativística. Seguindo o mesmo processo que foi feito anteriormente.

A lagrangeana do modelo Abelian de Higgs é

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + |(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi|^2 + m^2|\phi|^2 - b|\phi|^4, \quad (2.49)$$

onde  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  é o tensor eletromagnético.

Usando a aproximação Madelung para o campo escalar,  $\phi = \sqrt{\rho(\vec{x}, t)}e^{iS(\vec{x}, t)}$ , temos que a lagrangeana pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{4\rho}\partial_\mu\rho\partial^\mu\rho + \rho\partial_\mu S\partial^\mu S - 2\rho e\partial_\mu S A^\mu + e^2\rho A_\mu A^\mu + m^2\rho - b\rho^2, \quad (2.50)$$

conseqüentemente, dada a lagrangeana acima, as equações de movimento para  $S$  e  $\rho$  são, respectivamente,

$$-\partial_\mu [\rho (\partial^\mu S - eA^\mu)] = 0 \quad (2.51)$$

e

$$-\frac{1}{\sqrt{\rho}}\partial_\mu\partial^\mu\sqrt{\rho} + (\partial_\mu S - eA_\mu)^2 + m^2 - 2b\rho = 0. \quad (2.52)$$

Lembrando que as ondas sonoras, matematicamente, são escritas como perturbações acústicas no meio, iremos perturbar as duas equações de movimento encontradas acima, de maneira análoga ao que foi feito na seção anterior. Escrevendo  $S$  e  $\rho$  como segue

$$S = S_0 + \varepsilon S_1 + \vartheta(\varepsilon^2) \quad (2.53)$$

$$\rho = \rho_0 + \varepsilon\rho_1 + \vartheta(\varepsilon^2),$$

obtemos as equações perturbadas.

Primeiro temos que a equação (2.51) torna-se

$$-\partial_\mu [\rho_1 (\partial^\mu S_0 - eA^\mu) + \rho_0 \partial^\mu S_1] = 0$$

ou ainda

$$-\partial_\mu [\rho_1 U^\mu + \rho_0 \partial^\mu S_1] = 0, \quad (2.54)$$

onde  $U^\mu = (\partial^\mu S_0 - eA^\mu)$  é a quadrivelocidade do fluido.

Devemos lembrar que o termo do potencial quântico  $\rho^{-1/2}(\partial_\mu\partial^\mu\sqrt{\rho})$  é negligenciado na região hidrodinâmica (XIAN-RUI GE E SANG-JIN SIN, 2010). Logo, a equação é reescrita da seguinte forma

$$(\partial_\mu S - eA_\mu)(\partial^\mu S - eA^\mu) + m^2 - 2b\rho = 0.$$

Assim, quando a perturbamos, obtemos

$$\partial_\mu S_0 \partial^\mu S_1 - e A^\mu \partial_\mu S_1 - b \rho_1 = 0. \quad (2.55)$$

Prosseguindo com os cálculos, pretendemos encontrar uma equação de onda semelhante a equação (2.19) da seção (2.1). Tendo em vista que, dada a equação de onda, basta comparar com a equação de Klein-Gordon para determinar a métrica. Para isto, isolamos  $\rho_1$  em (2.55) e substituímos em (2.54), assim obtemos uma equação de onda como mostrada abaixo

$$\begin{aligned} & \partial_t \left[ \partial_t S_1 \left( \frac{-1}{b} \omega_0^2 - \rho_0 \right) + \partial_j S_1 \left( \frac{-1}{b} v_0^j \omega_0 \right) \right] \\ & + \partial_i \left[ \partial_t S_1 \left( \frac{-1}{b} \omega_0 v_0^i \right) + \partial_j S_1 \left( \frac{-1}{b} v_0^j v_0^i + \rho_0 \delta^{ij} \right) \right] = 0; \end{aligned} \quad (2.56)$$

definimos que  $\omega_0 = e A^t - \partial_t S_0$  e  $\vec{v}_0 = \vec{\nabla} S_0 + e \vec{A}$ . Colocando  $\omega_0^2/b$  em evidência, chegamos a seguinte equação de onda

$$\begin{aligned} & \partial_t \left\{ \frac{\rho_0 b}{c_s^2} [\partial_t S_1 (-1 - c_s^2) - \partial_j S_1 v^j] \right\} \\ & + \partial_i \left\{ \frac{\rho_0 b}{c_s^2} [-\partial_t S_1 v^i + \partial_j S_1 (-v^j v^i + c_s^2 \delta^{ij})] \right\} = 0, \end{aligned} \quad (2.57)$$

onde  $c_s^2 = \rho_0 b / \omega_0^2$  e  $\vec{v} = \vec{v}_0 / \omega_0$ .

Comparando com a equação (2.22), encontramos que

$$\sqrt{-g} g^{\mu\nu} = \frac{\rho_0 b}{c_s^2} \begin{bmatrix} -(1 + c_s^2) & \vdots & -v^j \\ \dots & & \dots \\ -v^i & \vdots & (c_s^2 \delta^{ij} - v^i v^j) \end{bmatrix}, \quad (2.58)$$

assim como a equação (2.31), esta matriz é uma maneira reduzida de escrever uma matriz  $4 \times 4$ . No entanto, ela ainda não representa a métrica, para obtê-la precisamos determinar  $g_{\mu\nu}$ , que é a inversa de  $g^{\mu\nu}$ .

Por conseguinte, iremos escrever a matriz acima na forma ampliada  $4 \times 4$ , e calcular sua inversa, que por sua vez é dada por

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} = \frac{1}{\rho_0 b f} \begin{bmatrix} -(c_s^2 - v^2) & -v_1 & -v_2 & -v_3 \\ -v_1 & c_s^2 - v_2^2 - v_3^2 + 1 & v_1 v_2 & v_1 v_3 \\ -v_2 & v_1 v_2 & c_s^2 - v_1^2 - v_3^2 + 1 & v_2 v_3 \\ -v_3 & v_1 v_3 & v_2 v_3 & c_s^2 - v_1^2 - v_2^2 + 1 \end{bmatrix};$$

onde  $f = c_s^2 - v^2 + 1$ . Feito isto, precisamos fazer algumas manipulações matemáticas para isolar o  $g_{\mu\nu}$  de um lado da igualdade. Obtemos então, que

$$g_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-\det(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})}} \frac{1}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu}. \quad (2.59)$$

Calculando o determinante, vemos que

$$\det(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) = - \left[ \frac{c_s^2}{\rho_0^4 b^4} \frac{1}{(c_s^2 - v^2 + 1)} \right], \quad (2.60)$$

desta forma, concluímos que a métrica é

$$g_{\mu\nu} = \frac{\rho_0 b}{c_s} \frac{1}{\sqrt{f}} \begin{bmatrix} -(c_s^2 - v^2) & \vdots & -v^j \\ \cdots & & \cdots \\ -v^i & \vdots & [(c_s^2 + 1) - v^2] \delta^{ij} + v^i v^j \end{bmatrix}. \quad (2.61)$$

Portanto, o elemento de linha acústico pode ser escrito como

$$ds^2 = \frac{\rho_0 b}{c_s} \frac{1}{\sqrt{f}} \left\{ -(c_s^2 - v^2) dt^2 - v^j dx^j dt - v^i dx^i dt + [(c_s^2 + 1 - v^2) \delta^{ij} + v^i v^j] dx^i dx^j \right\}.$$

De modo análogo a seção anterior, devemos escrever a métrica acústica na forma de Schwarzschild, assim o elemento de linha reescrito é

$$ds^2 = \frac{\rho_0 b}{c_s} \frac{1}{\sqrt{f}} \left\{ -(c_s^2 - v^2) d\tau^2 + f \left[ \frac{(\vec{v} \cdot \vec{dx})^2}{c_s^2 - v^2} + \vec{dx}^2 \right] \right\}, \quad (2.62)$$

para isto, utilizamos a seguinte mudança de coordenadas (ANACLETO, BRITO e PASSOS, 2012)

$$d\tau = dt + \frac{(\vec{v} \cdot \vec{dx})}{c_s^2 - v^2}. \quad (2.63)$$

Note que, mais uma vez temos uma geometria acústica estática. Observe ainda que aplicando o limite não relativístico na métrica relativística (2.62), ou seja, tomando o limite em que  $c_s \ll 1$  e  $v \ll 1$ , temos que a métrica se reduz a que foi encontrada por meio das equações de Euler e da continuidade na seção anterior (2.33).

## 2.3 Radiação Hawking

Nosso interesse, nesta seção, é calcular a temperatura Hawking para as duas métricas encontradas nas seções anteriores, a métrica relativística e a não relativística. No entanto, para iniciar, precisamos compreender a radiação Hawking e sua analogia acústica.

Stephen Hawking, estudando buracos negros, descobriu, ao aplicar conceitos da mecânica quântica, que um buraco negro emite radiação nas proximidades do horizonte de eventos (fronteira imaginária do buraco negro, a partir da qual a luz não escapa devido a força gravitacional ser muito forte nessa região). E é esta radiação que conhecemos por radiação Hawking (HAWKING, 1974).

No estudo da mecânica quântica, o vácuo contém pares de partículas, uma negativa e outra positiva, que se aniquilam muito rapidamente, respeitando o princípio da incerteza de Heisenberg. Quando essas partículas surgem dentro do buraco negro, próximas ao horizonte de eventos, o campo gravitacional pode separá-las; o buraco negro captura a partícula negativa e emite a positiva. Com isso, temos uma radiação sendo emitida e a massa do buraco negro sendo reduzida (TONIATO, 2010; HAWKING e GIBBONS, 1977). Essa radiação possui um espectro semelhante ao de um corpo negro, e por este motivo associamos ao buraco negro uma temperatura, que é a temperatura Hawking. No entanto, essa explicação é válida para o caso gravitacional, para o caso acústico ocorre de maneira semelhante, porém com algumas peculiaridades do modelo análogo.

Como já visto na introdução deste trabalho, obtemos um buraco negro acústico quando um fluido em movimento atinge uma velocidade acima da velocidade do som. É neste momento, quando as velocidades se igualam, que surge o horizonte de eventos acústico, ou horizonte sônico (BARCELÓ, LIBERATI e VISSER, 2011). Por analogia ao caso gravitacional, o horizonte acústico é uma fronteira imaginária na qual, a partir dela, o som não escapa. Quando há flutuações quânticas próximas ao horizonte acústico, temos que a radiação Hawking emite fônons. E é essa emissão de fônons que está relacionada com a temperatura Hawking para o modelo análogo.

O fato da radiação Hawking está relacionada com a temperatura Hawking, nos permite calcular o valor desta temperatura no horizonte de eventos, que é a região na qual a radiação é emitida. Um dos métodos de calculá-la é a partir da gravidade de superfície do buraco negro, que é definida por (HAWKING, 1975)

$$k = \frac{1}{2} \left( \frac{dg_{tt}}{dx} \right) \Big|_{horizonte}, \quad (2.64)$$

mas, para isto, precisamos escrever a métrica na forma de Schwarzschild, o que significa eliminar o termo cruzado das coordenadas espacial e temporal, como foi feito nas seções

anteriores. Assim o  $g_{tt}$  é o termo que multiplica a nova coordenada temporal

$$d\tau = dt + \frac{(\vec{v} \cdot \vec{dx})}{c_s^2 - v^2}. \quad (2.65)$$

Note que a gravidade de superfície deve ser calculada quando a velocidade do fluido é igual a do som, que é a definição de horizonte de evento acústico. (TONIATO, 2010)

Por outro lado, quando calculamos a taxa de emissão das partículas no horizonte de eventos, vemos que a temperatura esperada é dada por (HAWKING e GIBBONS, 1977)

$$T_H = \frac{k}{2\pi} = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{dg_{tt}}{dx} \right) \Big|_{horizonte}. \quad (2.66)$$

Tendo em mãos esta equação, a métrica na forma de Schwarzschild e a gravidade de superfície temos como calcular a temperatura Hawking acústica. Porém, devemos fazer mais uma observação. Se voltarmos as duas métricas obtidas nas seções anteriores, (2.34) e (2.62), veremos que o  $g_{tt}$  é função da velocidade do som  $c_s$  e da velocidade do fluido  $v$ . Contudo, no cálculo da temperatura consideramos um fluido incompressível com simetria esférica, ou seja, a velocidade do som é constante, a densidade não depende da posição e a velocidade do fluido é radial. Assim, da equação da continuidade (2.1), vemos que  $v \sim \frac{1}{r^2}$ . Logo, a derivada na coordenada  $x$  se torna uma derivada em  $r$  na equação (2.66) (ANACLETO, BRITO e PASSOS, 2012).

### 2.3.1 Cálculo da temperatura Hawking para o caso não relativístico

Tendo compreendido a radiação Hawking e o cálculo de sua temperatura, iremos aplicar os conhecimentos adquiridos para calcular a temperatura Hawking para o caso não relativístico e, a posteriori, para o caso relativístico.

Já vimos que para encontrar a temperatura Hawking consideramos a velocidade do fluido como sendo radial,  $v = v_r$ , sendo assim, iremos escrever a equação (2.34) em coordenadas esféricas

$$ds^2 = \frac{\rho_0}{c_s} \left[ -(c_s^2 - v_r^2) d\tau^2 + \frac{c_s^2}{(c_s^2 - v_r^2)} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (2.67)$$

feito isto, podemos calcular a temperatura Hawking.

Usando a equação (2.66), temos que

$$T_H = \frac{k}{2\pi} = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{d(c_s^2 - v_r^2)}{dr} \right] \Big|_{horizonte}, \quad (2.68)$$

por outro lado, obtemos um horizonte de eventos acústico quando a velocidade do fluido é igual a do som, ou seja,  $c_s = v_r$ , isto implica em usarmos o fato que  $v_r = c_s \frac{r_H^2}{r^2}$  (ANACLETO et al., 2012). Já o raio do horizonte é encontrado de maneira análoga ao de Schwarzschild, isto é, quando temos uma singularidade no infinito, o que significa que ele é obtido ao fazermos  $g_{rr} \rightarrow \infty$ . Sendo assim, a temperatura Hawking para o caso não relativístico é

$$T_H = \frac{c_s^2}{\pi r_H}. \quad (2.69)$$

### 2.3.2 Cálculo da temperatura Hawking para o caso relativístico

Seguindo o mesmo raciocínio que utilizamos para o caso não relativístico, vamos escrever o elemento de linha (2.62) em coordenadas esféricas

$$ds^2 = \frac{\rho_0 b}{c_s} \frac{1}{\sqrt{f}} \left\{ -(c_s^2 - v_r^2) d\tau^2 + f \left[ \frac{v_r dr^2}{c_s^2 - v_r^2} + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right] \right\}, \quad (2.70)$$

posteriormente, usamos a equação (2.66) e obtemos a temperatura Hawking para o caso relativístico

$$T_H = \frac{k}{2\pi} = \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dr} \left[ \frac{(c_s^2 - v_r^2)}{\sqrt{f}} \right] \Big|_{horizonte} = \frac{c_s^2}{\pi r_H}, \quad (2.71)$$

para chegar a esse resultado fizemos as mesmas considerações feitas anteriormente para o valor da velocidade do fluido, ou seja,  $v_r = c_s \frac{r_H^2}{r^2}$ . Para tanto, devemos lembrar também que obtemos o raio do horizonte quando  $g_{rr} \rightarrow \infty$ .

Analisando os dois resultados encontrados para a temperatura Hawking, tanto para o caso não-relativístico, quanto para o relativístico, observamos que a temperatura é inversamente proporcional ao raio do horizonte. Como o raio do buraco negro é proporcional a sua massa (SUSSKIND e LINDESAY, 2005),

$$r = \frac{2GM}{c^2}; \quad (2.72)$$

temos que a temperatura é inversamente proporcional a massa do buraco negro, ou seja,  $T_H \propto 1/M \propto 1/r_H$ . Sendo esta equação, conhecida como raio de Schwarzschild, encontrada para o caso gravitacional, mas também utilizada para o modelo análogo.



Temos que  $G$  é a constante gravitacional,  $M$  é a massa do objeto e  $c^2$  a velocidade da luz ao quadrado.

Para os buracos negros formados a partir do colapso gravitacional, a radiação cósmica de fundo do universo possui uma temperatura no valor de aproximadamente  $3K$ . Uma maneira de explicar esse fato, é considerar que mini buracos negros foram formados no início do universo.

Por outro lado, considerando o buraco negro acústico no condensado de Bose-Einstein <sup>1</sup>, vemos que a temperatura Hawking é apenas uma ordem de grandeza menor que a temperatura do condensado (FABBRI, 2014)

$$T_H \sim 10nK \leq T_{CBE} \sim 100nK, \quad (2.73)$$

detectamos modelos análogos do efeito Hawking através de experimentos convenientes do condensado de Bose Einstein.

## 2.4 Relação de dispersão

Fisicamente, uma relação de dispersão determina a relação existente entre frequência e comprimento de onda, ou de outra maneira, entre frequência e velocidade, associada a quantidades físicas de natureza ondulatória propagando-se em um meio material ou no vácuo. Frequentemente, as relações de dispersões mudam com o meio em que a onda se propaga e por esse motivo elas influenciam diretamente nas trajetórias de propagação, pois, quando uma onda atravessa uma interface de meios diferentes, ela sofre uma mudança em seu comprimento de onda.

É importante verificar a relação de dispersão pois ela nos permite entender como energia e momento são transportados de um ponto a outro em um meio.

Usaremos a equação (2.57) para derivar a relação de dispersão. Considerando que  $S_1$  é real, podemos escrever

$$S_1 \sim Re[e^{(i\omega t - i\vec{K} \cdot \vec{x})}], \quad (2.74)$$

---

<sup>1</sup>O condensado de Bose Einstein foi previsto em 1924 por Satyendra Nath Bose e Albert Einstein. Este é um gás diluído de bósons a uma temperatura muito baixa, da ordem de  $100nK$ , e se caracteriza por todos os seus constituintes possuírem o mesmo estado quântico, e sobe estas condições os efeitos quânticos se tornam aparentes macroscopicamente. (FABBRI, 2014).

sendo

$$\omega = \frac{\partial S_1}{\partial t} \quad e \quad \vec{K} = \vec{\nabla} S_1, \quad (2.75)$$

onde  $\omega$  é a frequência angular e  $\vec{k}$  é o número de onda. Neste momento, devemos ter cuidado para não confundir o  $k$  da gravidade de superfície, o qual usamos a letra minúscula para representar, com o  $K$  do número de onda, representado pela letra maiúscula.

Substituindo (2.74) em (2.57) e desenvolvendo as derivadas, obtemos que

$$(1 + c_s^2) \omega^2 - 2 (\vec{v} \cdot \vec{K}) \omega + K^2 (v^2 - c_s^2) = 0, \quad (2.76)$$

ou ainda,

$$a\omega^2 + \sigma\omega + d = 0, \quad (2.77)$$

onde

$$a = 1 + c_s^2, \quad \sigma = -2\vec{v} \cdot \vec{K} \quad e \quad d = K^2 (v^2 - c_s^2), \quad (2.78)$$

temos então uma equação de segundo grau, que é de fácil resolução. Escolhemos a velocidade na direção  $x$ , apenas para facilitar os cálculos devido ao produto escalar  $\vec{v} \cdot \vec{K}$ . Assim,  $v = v_1$ .

Resolvendo, temos que  $\Delta$  é

$$\Delta = 4K^2 c_s^2 [(1 + c_s^2) - v_1^2], \quad (2.79)$$

e

$$\omega = \frac{v_1 K \pm K c_s^2 \sqrt{1 + c_s^2 - v_1^2}}{1 + c_s^2}. \quad (2.80)$$

No limite não relativístico,  $c_s \ll 1$  e  $v_1 \ll 1$ , temos que

$$\omega \simeq \pm K c_s. \quad (2.81)$$

Por definição, a velocidade de grupo é dada por

$$v_g = \left| \frac{d\omega}{dK} \right|; \quad (2.82)$$

isto implica em,

$$v_g = c_s, \quad (2.83)$$

como a velocidade de grupo mede a velocidade máxima que uma partícula em um meio pode atingir, isto significa que a velocidade máxima atingida é a própria velocidade da onda sonora.

# Capítulo 3

## Não-comutatividade

O estudo de coordenadas não-comutativas surgiu com Heisenberg, motivado pelo desejo de propor uma relação de incerteza nula entre as coordenadas, a fim de eliminar alguns problemas de divergências ultravioleta na teoria quântica de campos. No entanto, o primeiro artigo sobre essa teoria só foi publicado em 1947, por Snyder, baseado nas idéias de Heisenber, com o objetivo de regularizar estas divergências. O uso da não-comutatividade foi deixado de lado, por alguns anos, devido a um grande sucesso no método de renormalização. Somente na década de 80 foi que ela voltou a ser estudada com o desenvolvimento de uma geometria não-comutativa elaborada por Connes (TEDESCO, 2010; BEMFICA, 2009). Outro fato que também impulsionou o estudo da teoria não-comutativa, foi o interesse em formular uma teoria quântica da gravitação, pois em regiões da escala de Planck ( $l_p = \sqrt{G\hbar/c^3} \sim 10^{-33}cm$ ), onde a efeitos quânticos dessa teoria se tornam relevantes, a comutatividade perde o sentido.

Se considerarmos, por exemplo, uma partícula eletricamente carregada e medirmos a sua coordenada espaço-temporal  $a$ , veremos, da relação de incerteza de Heisenberg, que ela terá um momento da ordem de  $1/a$ . À medida que a intensidade do campo vai aumentando, uma grande quantidade de energia vai sendo concentrada em um volume muito pequeno. O que, segundo a teoria da relatividade geral, causa uma deformação no espaço-tempo, devido a matéria e a energia. Quando tomamos um limite de  $a \rightarrow 0$ , um horizonte de eventos é formado, impossibilitando a detecção da partícula neste ponto do espaço-tempo. Assim, o conceito clássico de espaço-tempo contínuo dá lugar a um espaço-tempo fragmentado em células, no qual não há a idéia de ponto. Explicando de outra maneira, quando tomamos o limite de  $a \rightarrow 0$  não conseguimos detectar a

posição da partícula; com isso, as coordenadas se tornam não-comutativas, e então temos uma incerteza tanto na posição quanto no momento. Logo, o espaço-tempo torna-se fragmentado em células.

Como solução desse problema temos que as coordenadas do espaço-tempo deixam de ser contínuas e passam a ser operadores hermitianos,  $x^\mu$ , que não comutam entre si. Assim, as relações de comutação da mecânica quântica usual

$$[\hat{X}_i, \hat{P}_j] = i\hbar\delta_{ij} \quad e \quad [\hat{X}_i, \hat{X}_j] = [\hat{P}_i, \hat{P}_j] = 0, \quad (3.1)$$

dão lugar a seguinte relação

$$[\hat{X}^\mu, \hat{X}^\nu] = i\theta^{\mu\nu}. \quad (3.2)$$

Com isso, do princípio da incerteza generalizado

$$\Delta x_\mu^2 \Delta x_\nu^2 \geq \left( \frac{1}{2i} \langle [\hat{X}_\mu, \hat{X}_\nu] \rangle \right)^2, \quad (3.3)$$

temos uma nova relação de incerteza para a teoria não-comutativa:

$$\Delta x^\mu \Delta x^\nu \geq \frac{1}{2} |\theta^{\mu\nu}|, \quad (3.4)$$

onde  $\mu, \nu = 0, 1, 2 \dots D-1$  e  $\theta$  é uma matriz  $D \times D$  real e anti-simétrica com dimensão de comprimento ao quadrado (AMORIM et al., 2013). Como  $\theta$  é muito pequeno, aqui usaremos apenas os termos de primeira ordem em  $\theta$ .

Um exemplo físico no qual verificamos a não-comutatividade nas coordenadas é o problema de Landau. Este problema trata de uma partícula carregada movendo-se perpendicularmente ao plano em um campo magnético constante.

Neste capítulo, estudaremos o problema de Landau a fim de observar a não comutatividade nas coordenadas; a posteriori, compreenderemos um pouco do espaço tempo não comutativo, bem como o produto Moyal e suas propriedades; e por fim, iremos aplicar a não-comutatividade na métrica acústica para o caso relativístico, aquela encontrada no capítulo anterior, com o objetivo de calcular a temperatura Hawking e verificar qual a contribuição da não-comutatividade nesse cálculo.

### 3.1 O problema de Landau

Nesta seção, através de um sistema físico simples, o conhecido problema de Landau, iremos mostrar como surge a não-comutatividade nas coordenadas espaço-temporais. Este

problema trata de partículas carregadas se movendo em duas dimensões na presença de um campo magnético constante e perpendicular ao plano em que elas se movem.

Tal estudo foi feito primeiramente por Landau em 1930. Ele descreveu a dinâmica quântica dessas partículas e mostrou que os níveis de energia, conhecidos como níveis de Landau, são discretos e infinitamente degenerados (MELO, 2010).

Para iniciar, iremos considerar que essas  $N$  partículas são carregadas, possuem massa  $m$  e se movem no plano  $r_a = (x_a, y_a)$  na presença de um campo magnético  $\vec{B} = B\hat{k}$ , que como já foi dito, é constante e perpendicular a este plano; sendo  $a = 1, \dots, N$ .

A lagrangeana que descreve este sistema físico é

$$L = \sum_{a=1}^N \left[ \frac{m}{2} \dot{r}_a^2 + e \dot{r}_a \cdot \vec{A}(r_a) - V(r_a) \right] - \sum_{a<b} U(r_a - r_b), \quad (3.5)$$

onde  $U(r_a - r_b)$  é o potencial de interação entre as partículas e  $\vec{A}(r_a)$  é o potencial vetor. O campo magnético constante nos permite assumir o gauge de Landau para este potencial vetor,  $\vec{A}(r_a) = (0, -Bx_a, 0)$ . Portanto, usando o fato que

$$H = \sum_i P_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}),$$

temos que o hamiltoniano que quantiza canonicamente este sistema é

$$H = \sum_{a=1}^N \left[ \frac{m \dot{r}_a^2}{2} + V(r_a) \right] + \sum_{a<b} U(r_a - r_b).$$

Escrevendo-o em termos do momento não canônico, ou momento mecânico,  $\pi_a$ , temos que

$$H = \sum_{a=1}^N \left[ \frac{\pi_a^2}{2m} + V(r_a) \right] + \sum_{a<b} U(r_a - r_b), \quad (3.6)$$

onde o momento mecânico é dado em função do canônico  $\vec{P}_a$ , como segue

$$\pi_a = m \dot{r}_a = \vec{P}_a - e \vec{A}(r_a). \quad (3.7)$$

Se escrevermos o operador momento  $\pi_a$  em termos dos operadores de levantamento e abaixamento do oscilador harmônico, e considerarmos que o sistema está isento de interações, ou seja,  $U = V = 0$ , observamos que os autovalores de energia são os dos níveis de Landau (ANACLETO, 2004)

$$E' = \hbar \omega \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad (3.8)$$

onde  $\omega = eB/mc$ . Ou ainda, para o  $n$ -ésimo estado temos que os auto valores da energia são dados por

$$E_n = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) + \frac{K_z^2}{2m}. \quad (3.9)$$

Enquanto o momento canônico obedece as relações usuais de comutação, dadas por (3.1), o momento mecânico obedece a seguinte relação

$$[\pi_a^x, \pi_b^y] = ieB\hbar\delta_{ab}. \quad (3.10)$$

Fica fácil mostrar esta relação se escrevermos

$$[\pi_a^x, \pi_b^y] = [P_a^x - eA^x(r_a), P_b^y - eA^y(r_b)]. \quad (3.11)$$

Com isso, observamos que o espaço dos momentos na presença de uma campo magnético não é comutativo (ANACLETO, 2004).

Por outro lado, para verificar a não comutatividade no espaço das coordenadas, devemos tomar o limite do campo magnético forte  $B \rightarrow \infty$ , o que significa desprezar o termo de inercia, ou seja,  $m = 0$  (FRESNEDA, 2008). Fazendo isso, temos que a lagrangeana torna-se

$$L = \sum_{a=1}^N [eBx_a\dot{y}_a - V(x_a, y_a)] - \sum_{a<b} U(r_a - r_b). \quad (3.12)$$

Assim, a relação de comutação entre as coordenadas é

$$[x_a^i, x_b^j] = i\hbar\delta_{ab}\theta^{ij}, \quad (3.13)$$

onde

$$\theta^{ij} = \frac{\epsilon^{ij}}{eB} \quad (3.14)$$

é o parâmetro da não-comutatividade.

Observe que a não-comutatividade nas coordenadas espaço-temporais surgiu como consequência do limite que escolhemos, para um campo magnético muito forte. Este problema físico, é apenas um caso entre outros nos quais se pode verificar a não-comutatividade. A exemplo da teoria de cordas e da matéria condensada.

## 3.2 O espaço-tempo não-comutativo

A formulação de uma teoria de campos não-comutativa requer um cuidado especial no momento de definir as operações básicas. Pois não podemos mais tratar o produto como sendo uma multiplicação simples dos campos; ao invés disso, substituímos o produto de campos por seu produto Moyal, que é associativo, porém não-comutativo. E as coordenadas  $x^\mu$  por operadores hermitianos  $\hat{x}^\mu$ .

No que segue, veremos a definição do produto Moyal e suas propriedades.

### 3.2.1 O produto Moyal

O produto Moyal, conhecido também como produto estrela, era descrito como uma expansão em  $\hbar$  no início da mecânica quântica, porém, na teoria de campos não-comutativa é descrito como uma expansão de  $\theta$ . Este produto é definido por (TEDESCO, 2010),

$$f(x) \star g(x) = f(x) \exp \left[ \frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_\mu \theta^{\mu\nu} \overrightarrow{\partial}_\nu \right] g(x), \quad (3.15)$$

onde a seta indica o sentido no qual a derivada está atuando. Ou ainda, se expandirmos a exponencial, da equação acima, usando a fórmula de Euler

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha), \quad (3.16)$$

podemos escrever a definição de produto Moyal da seguinte maneira

$$f(x) \star g(x) = f(x) g(x) + \frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} \partial_\mu f(x) \partial_\nu g(x) + \mathcal{O}(\theta^2). \quad (3.17)$$

Abaixo seguem algumas relações imediatas destas definições:

**I.** Relação de comutação entre duas coordenadas:

$$\begin{aligned} [x^\mu \star, x^\nu] &= x^\mu \star x^\nu - x^\nu \star x^\mu \\ &= x^\mu x^\nu + \frac{i}{2} \theta^{\alpha\beta} \partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x^\nu - x^\nu x^\mu - \frac{i}{2} \theta^{\alpha\beta} \partial_\alpha x^\nu \partial_\beta x^\mu \\ &= i\theta^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Aqui usamos o fato que  $\theta^{\mu\nu}$  é anti-simétrico.

**II.** Relação de comutação entre uma coordenada e uma função:

$$\begin{aligned} [x^\mu \star, f(x)] &= x^\mu \star f(x) - f(x) \star x^\mu \\ &= x^\mu f(x) + \frac{i}{2} \theta^{\alpha\beta} \partial_\alpha x^\mu \partial_\beta f(x) - f(x) x^\mu - \frac{i}{2} \theta^{\alpha\beta} \partial_\alpha f(x) \partial_\beta x^\mu \\ &= i\theta^{\mu\nu} \partial_\nu f(x) \end{aligned} \quad (3.19)$$

**III.** Relação de comutação entre duas funções:

$$\begin{aligned}
[f(x) \star g(x)] &= f(x) \star g(x) - g(x) \star f(x) \\
&= f(x) \exp\left(\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_\mu \theta^{\mu\nu} \overrightarrow{\partial}_\nu\right) g(x) - g(x) \exp\left(\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_\mu \theta^{\mu\nu} \overrightarrow{\partial}_\nu\right) f(x) \\
&= 2if(x) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2} \theta^{\mu\nu} \overleftarrow{\partial}_\mu \overrightarrow{\partial}_\nu\right) g(x)
\end{aligned} \tag{3.20}$$

**IV.** Relação de anti-comutação entre duas funções:

$$\begin{aligned}
\{f(x) \star g(x)\} &= f(x) \star g(x) + g(x) \star f(x) \\
&= f(x) \exp\left(\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_\mu \theta^{\mu\nu} \overrightarrow{\partial}_\nu\right) g(x) + g(x) \exp\left(\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_\mu \theta^{\mu\nu} \overrightarrow{\partial}_\nu\right) f(x) \\
&= 2f(x) \cos\left(\frac{1}{2} \theta^{\mu\nu} \overleftarrow{\partial}_\mu \overrightarrow{\partial}_\nu\right) g(x)
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Para verificar algumas propriedades do produto Moyal, faz-se necessário considerar a transformada de Fourier, que nos permite escrever funções, que estão no espaço das coordenadas, nos espaços dos momentos,

$$f(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{f}(k) e^{ik_\mu x^\mu}, \tag{3.22}$$

onde  $\tilde{f}(k)$  é definido por

$$\tilde{f}(k) \equiv \int d^4 x f(x) e^{-ik_\mu x^\mu}. \tag{3.23}$$

Além disso, usaremos também a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff (SZABO, 2003),

$$e^A \cdot e^B = e^{A+B} \cdot e^{-\frac{1}{2}[A,B]}. \tag{3.24}$$

Tendo em mãos estas relações, podemos determinar outras propriedades:

**V.** Representação de Fourier para o produto Moyal

$$\begin{aligned}
f(x) \star g(x) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \tilde{f}(k) \tilde{g}(k') e^{ik_\mu x^\mu} \star e^{ik'_\nu x^\nu} \\
&= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \tilde{f}(k) \tilde{g}(k') e^{ix^\mu (k_\mu + k'_\mu)} e^{-\frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} k_\mu k'_\nu}
\end{aligned} \tag{3.25}$$

usamos a equação (3.24) para desenvolver o produto Moyal entre as exponenciais.

**VI.** Integração do produto Moyal:

$$\begin{aligned}
\int d^4 x f(x) \star g(x) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \tilde{f}(k) \tilde{g}(k') e^{ix^\mu (k_\mu + k'_\mu)} e^{-\frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} k_\mu k'_\nu} \\
&= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \tilde{f}(k) \tilde{g}(k') e^{ix^\mu (k_\mu + k'_\mu)}
\end{aligned} \tag{3.26}$$



a exponencial em  $\theta^{\mu\nu}$  tem expoente nulo devido a sua anti-simetria.

Usando a representação de Fourier da delta de Dirac

$$\delta(x - a) = \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ik(x-a)}; \quad (3.27)$$

e a propriedade de filtragem,

$$\int \delta(x - a) f(x) dx = f(a), \quad (3.28)$$

obtemos:

$$\begin{aligned} \int d^4x f(x) \star g(x) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \tilde{f}(k) \tilde{g}(-k) (2\pi)^4 \delta(k_\mu + k'_\mu) \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{f}(k) \tilde{g}(-k). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Logo, se substituirmos a equação (3.23) na equação acima, vemos que a integral do produto moyal é dada por

$$\int d^4x f(x) \star g(x) = \int d^4x f(x) g(x). \quad (3.30)$$

**VII. Associatividade:**

$$\{[f(x) \star g(x)] \star h(x)\} = \{f(x) \star [g(x) \star h(x)]\} \quad (3.31)$$

**VIII. Propriedade cíclica:**

$$\int d^4x f_1(x) \star f_2(x) \star \dots \star f_n(x) = \int d^4x f_2(x) \star f_1(x) \star \dots \star f_n(x) \quad (3.32)$$

**IX. Complexo conjugado**

$$[f(x) \star g(x)]^* = g(x)^* \star f(x)^* \quad (3.33)$$

se  $f$  e  $g$  forem funções reais, então o seu produto Moyal também será.

Estas foram apenas algumas propriedades para nos familiarizarmos com a álgebra do produto Moyal.

### 3.3 Métrica acústica não-comutativa

No capítulo anterior, mais precisamente em sua seção (2.2), trabalhamos com a lagrangeana do modelo abeliano de Higs. Fizemos algumas aproximações escrevendo o potencial em termos de variáveis hidrodinâmicas, a fim de assegurar que a métrica encontrada seria acústica; encontramos as equações de movimento e por fim a métrica relativística. Nesta seção, repetiremos esses cálculos mas, com uma diferença, inserindo a não-comutatividade nas coordenadas.

Vimos no presente capítulo, que a não-comutatividade é inserida trocando o produto ordinário dos campos pelo produto Moyal. Assim, a lagrangeana que antes era dada por (2.49), será agora escrita como segue:

$$\hat{\mathcal{L}} = -\frac{1}{4}\hat{F}_{\mu\nu} \star \hat{F}^{\mu\nu} + (D_\mu \hat{\phi})^* \star D^\mu \hat{\phi} + m^2 \hat{\phi}^* \star \hat{\phi} - b \hat{\phi}^* \star \hat{\phi} \star \hat{\phi}^* \star \hat{\phi}, \quad (3.34)$$

onde  $D_\mu = (\partial_\mu - ieA_\mu)$  é a derivada covariante e  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ , como já sabemos, é o tensor eletromagnético. Estamos usando o circunflexo para indicar os campos não-comutativos.

A rigor, o próximo passo é expandir cada produto Moyal da lagrangeana acima, assim como mostrado na definição, equação (3.17). Porém, isto tomará muito tempo. No entanto, existe o mapeamento Seiberg-Wintten, que para a ordem mais trivial de  $\theta$ , permite escrever os campos como segue (GHOSH, 2005; FREITAS, 2013; SEIBERG e WITTEN, 1999),

$$\begin{aligned} \hat{A}_\mu &= A_\mu + \theta^{\nu\rho} A_\rho (\partial_\nu A_\mu - \frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu), \\ \hat{F}_{\mu\nu} &= F_{\mu\nu} + \theta^{\rho\beta} (F_{\mu\rho} F_{\nu\beta} + A_\rho \partial_\beta F_{\mu\nu}), \\ \hat{\phi} &= \phi - \frac{1}{2} \theta^{\mu\nu} A_\mu \partial_\nu \phi, \end{aligned} \quad (3.35)$$

este mapeamento foi descoberto no contexto da teoria de cordas e pode ser interpretado como uma expansão em  $\theta$  do campo de gauge (calibre) não-comutativo (BICHL et al., 2001).

Com isso, a lagrangeana torna-se:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \left( 1 + \frac{1}{2} \theta^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) + \left( 1 - \frac{1}{4} \theta^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) (|D_\mu \phi|^2 + m^2 |\phi|^2 - b |\phi|^4) \\ &+ \frac{1}{2} \theta^{\alpha\beta} F_{\alpha\mu} [(D_\beta \phi)^\dagger D^\mu \phi + (D^\mu \phi)^\dagger D_\beta \phi]. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Lembrando o que foi feito no capítulo anterior, tendo a lagrangeana, utilizamos a aproximação Madelung,  $\phi = \sqrt{\rho(\vec{x}, t)} e^{iS(\vec{x}, t)}$ , para reescrever o campo escalar em função de quantidades hidrodinâmicas. Portanto, fazendo esta aproximação, temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \left(1 - 2\vec{\theta} \cdot \vec{B}\right) + \tilde{\theta} \left[\partial_\mu S \partial^\mu S - 2eA_\mu \partial^\mu S + e^2 A_\mu A^\mu + m^2\right] \rho - \tilde{\theta} b \rho^2 \\ &+ \Theta^{\mu\nu} \left[\partial_\mu S \partial_\nu S - eA_\mu \partial_\nu S - eA_\nu \partial_\mu S + e^2 A_\mu A_\nu\right] \rho \\ &+ \frac{\rho}{\sqrt{\rho}} \left[\tilde{\theta} \partial_\mu \partial^\mu + \Theta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu\right] \sqrt{\rho},\end{aligned}\quad (3.37)$$

onde  $\tilde{\theta} = (1 + \vec{\theta} \cdot \vec{B})$ ,  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$  e  $\Theta^{\mu\nu} = \theta^{\alpha\mu} F_\alpha{}^\nu$ . Consideramos que não existe não-comutatividade entre as coordenadas espaciais e temporais, ou seja,  $\theta^{0i} = 0$ , mas  $\theta^{ij} = \varepsilon^{ijk} \theta^k$ ,  $F^{i0} = E^i$  e  $F^{ij} = \varepsilon^{ijk} B^k$ .

Da lagrangeana (3.37), obtemos as seguintes equações de movimento para  $S$  e  $\rho$ , respectivamente

$$-\partial_\mu \left[ \tilde{\theta} \rho (\partial^\mu S - eA^\mu) + \frac{\rho}{2} (\Theta^{\mu\nu} + \Theta^{\nu\mu}) (\partial_\nu S - eA_\nu) \right] = 0, \quad (3.38)$$

e

$$\begin{aligned}& \frac{(\tilde{\theta} \partial_\mu \partial^\mu + \Theta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu) \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} + \tilde{\theta} (\partial_\mu S - eA_\mu)^2 \\ &+ \Theta^{\mu\nu} (\partial_\mu S - eA_\mu) (\partial_\nu S - eA_\nu) + \tilde{\theta} m^2 - 2\tilde{\theta} b \rho = 0;\end{aligned}\quad (3.39)$$

e para o campo de Gauge,  $A_{\mu\nu}$ , obtemos as equações de Maxwell modificadas

$$\begin{aligned}& \partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{1}{4} \partial_\mu (\theta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + 2\theta^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} F^{\mu\nu}) - \frac{1}{2} \theta^{\mu\nu} \partial_\mu (u_\alpha u^\alpha \rho + m^2 \rho - b \rho^2) \\ & - \partial_\mu [u_\beta (\theta^{\mu\beta} u^\nu - \theta^{\nu\beta} u^\mu) \rho] + \partial_\mu \left[ \frac{\rho}{\sqrt{\rho}} \left( \frac{1}{2} \theta^{\mu\nu} \partial_\alpha \partial^\alpha - \theta^{\mu\beta} \partial_\beta \partial^\nu + \theta^{\nu\beta} \partial_\beta \partial^\mu \right) \sqrt{\rho} \right] \\ & = 2e\rho(1 + \vec{\theta} \cdot \vec{B}) u^\nu + e\rho u^\mu (\theta^{\alpha\nu} F_{\alpha\mu} + \theta_{\alpha\mu} F^{\alpha\nu}).\end{aligned}\quad (3.40)$$

Assim como desprezamos o termo de potencial quântico para a equação de movimento do  $\rho$ , no caso não-comutativo, iremos também desprezar este termo na equação (3.39). Pois, em regiões hidrodinâmicas, o mesmo é negligenciado. Usando as relações (2.54) temos que as equações de movimento perturbadas, para o  $S$  e o  $\rho$  são, respectivamente

$$\begin{aligned}& -\partial_\mu \left\{ \rho_0 \left[ \tilde{\theta} \partial^\mu S_1 + \frac{(\Theta^{\mu\nu} + \Theta^{\nu\mu})}{2} \partial_\nu S_1 \right] \right. \\ & \left. + \rho_1 \left[ \tilde{\theta} \partial^\mu S_0 - \tilde{\theta} e A^\mu + \frac{(\Theta^{\mu\nu} + \Theta^{\nu\mu})}{2} (\partial_\nu S_0 - e A_\nu) \right] \right\} = 0\end{aligned}\quad (3.41)$$

e

$$\begin{aligned} & \tilde{\theta} (2\partial_\mu S_0 \partial^\mu S_1 - 2eA^\mu \partial_\mu S_1) \\ & + \Theta^{\mu\nu} [\partial_\nu S_1 (\partial_\mu S_0 - eA_\mu) + \partial_\mu S_1 (\partial_\nu S_0 - eA_\nu)] - 2\tilde{\theta} b \rho_1 = 0. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Ou ainda, na forma ampliada, temos:

$$\begin{aligned} & -\partial_t \left[ \rho_0 \left( \tilde{\theta} \dot{S}_1 + \frac{\Theta^{jt}}{2} \partial_j S_1 \right) - \rho_1 \left( \tilde{\theta} w_0 - \frac{\Theta^{jt}}{2} v_0^j \right) \right] \\ & -\partial_i \left[ \rho_0 \left( \tilde{\theta} \partial^i S_1 + \frac{\Theta^{it}}{2} \dot{S}_1 + \frac{1}{2} (\Theta^{il} + \Theta^{li}) \partial_l S_1 \right) \right. \\ & \left. + \rho_1 \left( -\tilde{\theta} v_0^i - \frac{\Theta^{it}}{2} w_t + \frac{1}{2} (\Theta^{il} + \Theta^{il}) v_0^l \right) \right] = 0, \end{aligned} \quad (3.43)$$

e

$$-2\tilde{\theta} w_0 \dot{S}_1 - 2\tilde{\theta} v_0^i \partial_i S_1 + \Theta^{lt} (v_0^l \dot{S}_1 - w_0 \partial_l S_1) + \Theta^{lj} (v_0^l \partial_j S_1 + v_0^j \partial_l S_1) - \tilde{\theta} b \rho_1 = 0, \quad (3.44)$$

onde, definimos que  $w_0 = -\dot{S}_0 + eA_t$  e  $\vec{v}_0 = \vec{\nabla} S_0 + e\vec{A}$ . Fazendo algumas manipulações matemáticas, semelhante ao capítulo anterior, obtemos a seguinte equação de onda

$$\partial_t [a^{tt} \dot{S}_1 + a^{tj} \partial_j S_1] + \partial_i [a^{it} \dot{S}_1 + a^{ij} \partial_j S_1] = 0, \quad (3.45)$$

onde

$$a^{tt} = -\tilde{\theta} \rho_0 - \frac{2}{b} \left( \tilde{\theta} w_0^2 - \Theta^{jt} v_0^j w_0 \right), \quad (3.46)$$

$$a^{tj} = -\frac{1}{2} \rho_0 \Theta^{jt} - \frac{2}{b} \left[ v_0^j \left( \tilde{\theta} w_0 - \frac{\Theta^{lt}}{2} v_0^l \right) + \frac{\Theta^{jt}}{2} w_0^2 - \frac{1}{2} (\Theta^{lj} + \Theta^{jl}) w_0 v_0^l \right], \quad (3.47)$$

$$a^{it} = -\frac{1}{2} \rho_0 \Theta^{it} - \frac{2}{b} \left[ v_0^i \left( \tilde{\theta} w_0 - \frac{\Theta^{lt}}{2} v_0^l \right) + \frac{\Theta^{it}}{2} w_0^2 - \frac{1}{2} (\Theta^{li} + \Theta^{il}) w_0 v_0^l \right], \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} a^{ij} &= \tilde{\theta} \rho_0 \delta^{ij} - \frac{\rho_0}{2} (\Theta^{ij} + \Theta^{ji}) - \frac{2}{b} \left( \tilde{\theta} v_0^i v_0^j + \frac{\Theta^{it}}{2} w_0 v_0^j + \frac{\Theta^{jt}}{2} v_0^i w_0 \right) \\ &+ \frac{2}{b} \left[ \frac{1}{2} (\Theta^{lj} + \Theta^{jl}) v_0^i v_0^l + \frac{1}{2} (\Theta^{li} + \Theta^{il}) v_0^j v_0^l \right]. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Note que, podemos identificar a velocidade local do som como  $c_s^2 = \frac{b\rho_0}{2w_0^2}$  e a velocidade do fluido  $v^i = \frac{v_0^i}{w_0}$ . Comparando a equação da onda (3.45) com a equação de Klein-Gordon (2.22), vemos que

$$\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \equiv \frac{b\rho_0}{2c_s^2} \begin{bmatrix} g^{tt} & \vdots & g^{tj} \\ \cdots & \cdot & \cdots \\ g^{it} & \vdots & g^{ij} \end{bmatrix}, \quad (3.50)$$

sendo os elementos da matriz dados por

$$\begin{aligned}
g^{tt} &= -\tilde{\theta}c_s^2 - \left(\tilde{\theta} - \Theta^{jt}v^j\right), \\
g^{tj} &= -\frac{\Theta^{jt}}{2}c_s^2 - \left[\tilde{\theta}v^j - \frac{\Theta^{lt}}{2}v^lv^j + \frac{\Theta^{jt}}{2} - \frac{\Theta^{lj}}{2}v^l - \frac{\Theta^{jl}}{2}v^l\right], \\
g^{it} &= -\frac{\Theta^{it}}{2}c_s^2 - \left[\tilde{\theta}v^i - \frac{\Theta^{lt}}{2}v^lv^i + \frac{\Theta^{it}}{2} - \frac{\Theta^{li}}{2}v^l - \frac{\Theta^{il}}{2}v^l\right], \\
g^{ij} &= \left[\tilde{\theta}\delta^{ij} - \frac{1}{2}(\Theta^{ij} + \Theta^{ji})\right]c_s^2 - \left[\tilde{\theta}v^iv^j + \frac{\Theta^{it}}{2}v^j + \frac{\Theta^{jt}}{2}v^i\right] \\
&\quad + \left[\frac{1}{2}(\Theta^{lj} + \Theta^{jl})v^iv^l + \frac{1}{2}(\Theta^{li} + \Theta^{il})v^jv^l\right].
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Contudo, a matriz que desejamos encontrar é a inversa de  $g^{\mu\nu}$ , pois ela nos determina a métrica não-comutativa do buraco negro acústico. Usando a equação (2.59), obtemos

$$g_{\mu\nu} \equiv \frac{\frac{b\rho_0}{2c_s}}{\sqrt{f}} \begin{bmatrix} g_{tt} & \vdots & g_{ti} \\ \cdots & \cdot & \cdots \\ g_{jt} & \vdots & g_{ij} \end{bmatrix}, \tag{3.52}$$

onde

$$\begin{aligned}
g_{tt} &= -\left[(\tilde{\theta} - \Theta^{jj})c_s^2 - \tilde{\theta}v^2 + 2\Theta^{jl}v^jv^l - \Theta^{jt}v^j\right], \\
g_{tj} &= -\frac{\Theta^{jt}}{2}c_s^2 - \left[\tilde{\theta}v^j - \frac{\Theta^{lt}}{2}v^lv^j + \frac{\Theta^{jt}}{2} - \frac{\Theta^{lj}}{2}v^l - \frac{\Theta^{jl}}{2}v^l\right], \\
g_{it} &= -\frac{\Theta^{it}}{2}c_s^2 - \left[\tilde{\theta}v^i - \frac{\Theta^{lt}}{2}v^lv^i + \frac{\Theta^{it}}{2} - \frac{\Theta^{li}}{2}v^l - \frac{\Theta^{il}}{2}v^l\right], \\
g_{ij} &= [\tilde{\theta}(1 + c_s^2) - \tilde{\theta}v^2 - \Theta^{lt}v^l]\delta^{ij} + \tilde{\theta}v^iv^j.
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Temos que,  $\Theta^{jt} = \theta^{ij}F_i^t = -\theta^{ij}F^{it} = \theta^{ij}E^i$  and  $\Theta^{jl} = \theta^{ij}F_i^l = -\theta^{ij}F^{il}$ . Logo, as componentes da métrica são:

$$\begin{aligned}
g_{tt} &= -[(1 - 3\vec{\theta} \cdot \vec{B})c_s^2 - (1 + 3\vec{\theta} \cdot \vec{B})v^2 + 2(\vec{\theta} \cdot \vec{v})(\vec{B} \cdot \vec{v}) - (\vec{\theta} \times \vec{E}) \cdot \vec{v}], \\
g_{tj} &= -\frac{1}{2}(\vec{\theta} \times \vec{E})^j(c_s^2 + 1) - \left[2(1 + 2\vec{\theta} \cdot \vec{B}) - (\vec{\theta} \times \vec{E}) \cdot \vec{v}\right]\frac{v^j}{2} + \frac{B^j}{2}(\vec{\theta} \cdot \vec{v}) + \frac{\theta^j}{2}(\vec{B} \cdot \vec{v}), \\
g_{it} &= -\frac{1}{2}(\vec{\theta} \times \vec{E})^i(c_s^2 + 1) - \left[2(1 + 2\vec{\theta} \cdot \vec{B}) - (\vec{\theta} \times \vec{E}) \cdot \vec{v}\right]\frac{v^i}{2} + \frac{B^i}{2}(\vec{\theta} \cdot \vec{v}) + \frac{\theta^i}{2}(\vec{B} \cdot \vec{v}), \\
g_{ij} &= [(1 + \vec{\theta} \cdot \vec{B})(1 + c_s^2) - (1 + \vec{\theta} \cdot \vec{B})v^2 - (\vec{\theta} \times \vec{E}) \cdot \vec{v}]\delta^{ij} + (1 + \vec{\theta} \cdot \vec{B})v^iv^j. \\
f &= [(1 - 2\vec{\theta} \cdot \vec{B})(1 + c_s^2) - (1 + 4\vec{\theta} \cdot \vec{B})v^2] - 3(\vec{\theta} \times \vec{E}) \cdot \vec{v} + 2(\vec{B} \cdot \vec{v})(\vec{\theta} \cdot \vec{v}).
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Observe que, a métrica acústica acima depende da densidade do fluido  $\rho_0$ , da velocidade local do som  $c_s$ , da velocidade do fluido  $\vec{v}$ , do parâmetro da não-comutatividade  $\theta$  e dos campos elétrico  $\vec{E}$  e magnético  $\vec{B}$ .

Escrevendo o elemento de linha acústico, temos que

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{b\rho_0}{2c_s\sqrt{f}} [g_{tt}dt^2 + g_{it}dx^i dt + g_{jt}dtdx^j + g_{ij}dx^i dx^j], \\ &= \frac{b\rho_0}{2c_s\sqrt{f}} [-\mathcal{F}(v)dt^2 - \vec{\xi}(v) \cdot d\vec{x}dt + \Lambda(v)dx^2 + (1 + \vec{\theta} \cdot \vec{B})(\vec{v} \cdot d\vec{x})^2], \end{aligned} \quad (3.55)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(v) &= (1 - 3\vec{\theta} \cdot \vec{B})c_s^2 - (1 + 3\vec{\theta} \cdot \vec{B})v^2 - (\vec{\theta} \times \vec{E}) \cdot \vec{v} + 2(\vec{\theta} \cdot \vec{v})(\vec{B} \cdot \vec{v}), \\ \Lambda(v) &= (1 + \vec{\theta} \cdot \vec{B})(1 + c_s^2 - v^2) - (\vec{\theta} \times \vec{E}) \cdot \vec{v}, \\ \vec{\xi}(v) &= [2(1 + 2\vec{\theta} \cdot \vec{B}) - (\vec{\theta} \times \vec{E}) \cdot \vec{v}]\vec{v} + (1 + c_s^2)(\vec{\theta} \times \vec{E}) - (\vec{B} \cdot \vec{v})\vec{\theta} - (\vec{\theta} \cdot \vec{v})\vec{B}. \end{aligned}$$

Fazendo uma mudança de coordenadas a fim de escrever a métrica acústica na forma de Schwarzschild, temos que nossa nova coordenada temporal é

$$d\tau = dt + \frac{\vec{\xi}(v) \cdot d\vec{x}}{2\mathcal{F}(v)}, \quad (3.56)$$

o que nos permite escrever a métrica como

$$ds^2 = \frac{b\rho_0}{2c_s\sqrt{f}} \left[ -\mathcal{F}(v)d\tau^2 + \Lambda \left( \frac{v^i v^j \Gamma + \Sigma^{ij}}{\Lambda\mathcal{F}(v)} + \delta^{ij} \right) dx^i dx^j \right], \quad (3.57)$$

onde

$$\begin{aligned} \Gamma(v) &= 1 + 4\vec{\theta} \cdot \vec{B} + (1 - 2\vec{\theta} \cdot \vec{B})c_s^2 - (1 + 4\vec{\theta} \cdot \vec{B})v^2 - 2(\vec{\theta} \times \vec{E}) \cdot \vec{v} + 2(\vec{\theta} \cdot \vec{v})(\vec{B} \cdot \vec{v}), \\ \Sigma^{ij}(v) &= [(1 + c_s^2)(\vec{\theta} \times \vec{E})^i - (\vec{B} \cdot \vec{v})\theta^i - (\vec{\theta} \cdot \vec{v})B^i]v^j. \end{aligned}$$

Lembre-se que, fazer essa mudança de coordenadas nos leva a escrever uma métrica estacionária, pois estamos eliminando os termos cruzados das coordenadas espaciais e temporais.

### 3.4 Temperatura Hawking

Tendo obtido a métrica acústica não-comutativa, queremos calcular a temperatura Hawking para esta métrica. Devemos lembrar que a densidade do fluido não depende da posição e que a sua velocidade é radial. Assim, a métrica (3.57) deve ser escrita em coordenadas esféricas, como segue:

$$ds^2 = -\tilde{\mathcal{F}}(v_r)d\tau^2 + \frac{[v_r^2\Gamma + \Sigma + \tilde{\mathcal{F}}(v_r)\Lambda]}{\tilde{\mathcal{F}}(v_r)}dr^2 + \frac{(1 + c_s^2)r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\phi^2)}{\sqrt{f}}, \quad (3.58)$$

onde  $\tilde{\mathcal{F}}(v_r) = \frac{\mathcal{F}(v_r)}{\sqrt{f}}$ . Tomando o limite não relativístico,  $c_s \ll 1$  e  $v \ll 1$ , temos que

$$\tilde{\mathcal{F}}(v_r) = \frac{\left[ (1 - 3\vec{\theta} \cdot \vec{B})c_s^2 - (1 + 3\vec{\theta} \cdot \vec{B})v_r^2 - (\vec{\theta} \times \vec{E})_r v_r + 2(\theta_r B_r v_r^2) \right]}{\sqrt{(1 - 2\vec{\theta} \cdot \vec{B}) - 3(\vec{\theta} \times \vec{E})_r v_r}}. \quad (3.59)$$

Já sabemos que a temperatura Hawking é dada por

$$T_H = \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dr} (g_{tt}) \Big|_{r=r_H} = \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dr} \left[ \tilde{\mathcal{F}}(v_r) \right] \Big|_{r=r_H}, \quad (3.60)$$

no entanto, como estamos tratando, agora, de uma métrica não-comutativa, para poder calcular a temperatura, precisamos reescrever o raio do horizonte,  $r_H$ , em termos do parâmetro da não-comutatividade.

Obtemos o raio do horizonte quando fazemos  $g_{rr} \rightarrow \infty$ , ou seja,

$$\frac{[v_r^2 \Gamma + \Sigma + \tilde{\mathcal{F}}(v_r) \Lambda]}{\tilde{\mathcal{F}}(v_r)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathcal{F}}(v_r) = 0, \quad (3.61)$$

escrevendo  $\vec{\theta} \cdot \vec{B} = \Theta$  e  $(\vec{\theta} \cdot \vec{E})_r = \theta_e$  na equação (3.59) e considerando apenas os termos de primeira ordem em  $\Theta$ , obtemos de maneira simplificada que  $\tilde{\mathcal{F}}(v_r)$  é escrito como segue

$$\tilde{\mathcal{F}}(v_r) = \frac{1 - 3\Theta}{\sqrt{1 - 2\Theta - 3\theta_e \bar{v}_r}} (c_s^2 - \tilde{v}_r^2) \quad (3.62)$$

onde

$$\tilde{v}_r = (1 + 6\Theta - 2\theta_r B_r)^{1/2} \bar{v}_r \quad e \quad \bar{v}_r = v_r - \frac{\theta_e}{2}. \quad (3.63)$$

Então, igualando (3.62) a zero, obtemos que

$$c_s = \tilde{v}_r \quad \Rightarrow \quad c_s = (1 + 3\Theta - \theta_r B_r) v_r - \frac{\theta_e}{2}, \quad (3.64)$$

por outro lado, devemos lembrar que obtemos o raio do horizonte quando a velocidade do fluido é igual a velocidade do som, ou seja, quando  $v_r = c_s = r_H$ . Assim,

$$\tilde{r}_H = (1 + 3\Theta - \theta_r B_r) r_H - \frac{\theta_e}{2}. \quad (3.65)$$

Temos ainda que, no limite do horizonte de eventos,  $\tilde{v}_r = c_s \frac{\tilde{r}_H^2}{r^2}$ . Com isso,

$$\tilde{\mathcal{F}}(v_r) = \frac{1 - 3\Theta}{\sqrt{1 - 2\Theta - 3\theta_e c_s \frac{\tilde{r}_H^2}{r^2}}} \left( c_s^2 - c_s^2 \frac{\tilde{r}_H^4}{r^4} \right). \quad (3.66)$$

Calculando a temperatura Hawking corrigida pela não-comutatividade, temos

$$\tilde{T}_H = \frac{1}{\pi} \left( 1 - 2\Theta + \frac{3}{2} \theta_e c_s \right) \frac{c_s^2}{\tilde{r}_H}, \quad (3.67)$$

substituindo  $\tilde{r}_H$  na equação acima, obtemos

$$\tilde{T}_H = \frac{c_s^2}{\pi r_H} \left[ 1 - 5\Theta + \theta_r B_r + \frac{\theta_e}{2} \left( \frac{1}{r_H} + 3c_s \right) \right]. \quad (3.68)$$

Se consideramos que o campo elétrico é nulo, ou seja, o setor puramente magnético, e além disso, que o campo magnético se encontra na direção  $z$ , temos que  $\theta_e = \vec{\theta} \cdot \vec{E} = 0$  e  $\theta_r B_r$ . Assim, a temperatura Hawking se reduz a

$$\tilde{T}_H = \frac{c_s^2}{\pi r_H} (1 - 5\Theta), \quad (3.69)$$

e no limite de  $\theta \rightarrow 0$ , ou seja, onde as coordenadas voltam a ser comutativas, temos que a temperatura Hawking corrigida é igual a encontrada no capítulo anterior, quando não consideramos a não-comutatividade,

$$T_H = \frac{c_s^2}{\pi r_H}. \quad (3.70)$$

Desta forma, podemos escrever a temperatura corrigida em função da temperatura para o caso comutativo da seguinte forma,

$$\tilde{T}_H = T_H (1 - 5\Theta), \quad (3.71)$$

e então, isolando o parâmetro da não-comutatividade,  $\Theta$ , temos

$$\frac{\tilde{T}_H - T_H}{T_H} = -5\Theta \quad \Rightarrow \quad \frac{-\Delta T}{T_H} = -5\Theta \quad \Rightarrow \quad \Theta = \frac{\Delta T}{5T_H}. \quad (3.72)$$

Observe que a teoria não-comutativa é consistente. Aplicando-a no cálculo da temperatura Hawking de buraco negros acústicos, verificamos que ela é um caso mais geral, no qual, se tomarmos o limite do parâmetro que caracteriza a não-comutatividade tendendo a zero, voltamos ao nosso caso anterior.

### 3.5 Relação de dispersão

Mais uma vez iremos calcular a relação de dispersão, com o intuito de verificar como energia e momento se transportam de um ponto a outro em um meio. Neste caso, iremos derivar a equação de dispersão da equação (3.45). Lembrando que  $S_1$  é dado por

$$S_1 \sim \Re[e^{(i\omega t - i\vec{K} \cdot \vec{x})}], \quad (3.73)$$



onde

$$\omega = \frac{\partial S_1}{\partial t} \quad e \quad \vec{K} = \vec{\nabla} S_1. \quad (3.74)$$

De maneira análoga ao que fizemos na seção (2.4), temos que a equação (3.45) torna-se:

$$a\omega^2 + \sigma\omega + d = 0, \quad (3.75)$$

onde

$$\begin{aligned} a &= (1 + \vec{\theta} \cdot \vec{B})(1 + c_s^2) - (\vec{\theta} \times \vec{E}) \cdot \vec{v}, \\ \sigma &= [2(1 + 2\vec{\theta} \cdot \vec{B}) - (\vec{\theta} \times \vec{E}) \cdot \vec{v}](\vec{v} \cdot \vec{K}) + (c_s^2 + 1)(\vec{\theta} \times \vec{E}) \cdot \vec{K} - (\vec{\theta} \cdot \vec{v})(\vec{B} \cdot \vec{K}) \\ &\quad - (\vec{B} \cdot \vec{v})(\vec{\theta} \cdot \vec{K}), \\ d &= -\{[(1 + 2\vec{\theta} \cdot \vec{B})K^2 - (\vec{\theta} \cdot \vec{K})(\vec{B} \cdot \vec{K})]c_s^2 - (1 + 3\vec{\theta} \cdot \vec{B})v^2K^2 - [(\vec{\theta} \times \vec{E}) \cdot \vec{K}](\vec{v} \cdot \vec{K}) \\ &\quad + (\vec{\theta} \cdot \vec{v})(\vec{B} \cdot \vec{K})(\vec{v} \cdot \vec{K}) + (\vec{B} \cdot \vec{v})(\vec{\theta} \cdot \vec{K})(\vec{v} \cdot \vec{K})\}. \end{aligned}$$

Escolhendo a velocidade apenas na direção  $x$ ,  $v = v_x$ , encontramos que

$$\begin{aligned} \Delta &= 4K^2c_s^2 \left\{ \left[ (1 + 3\vec{\theta} \cdot \vec{B})(1 + c_s^2) - (1 + 4\vec{\theta} \cdot \vec{B})v_x^2 - (\vec{\theta} \times \vec{E}) \cdot \vec{v} \right] \right. \\ &\quad \left. - \theta_1 B_1(1 + c_s^2) + (\vec{B} \cdot \vec{v})\theta_1 v_x + (\vec{\theta} \cdot \vec{v})B_1 v_x \right\}. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Considerando que o campo magnético se encontra na direção  $z$  e que o campo elétrico é nulo, temos que  $\vec{\theta} \cdot \vec{B} = \theta_z B_z$  e  $\vec{\theta} \times \vec{E} = 0$ . Assim,

$$\omega = \frac{-(1 + 2\theta_z B_z)(v_x K) \pm c_s K \sqrt{(1 + 3\theta_z B_z)(1 + c_s^2) - (1 + 4\theta_z B_z)v_x^2}}{(1 + \theta_z B_z)(1 + c_s^2)}, \quad (3.77)$$

tomando o limite não relativístico,  $c_s \ll 1$ ,  $v_1 \ll 1$ , a relação de dispersão simplificada é

$$\omega \approx \pm \frac{c_s \sqrt{(1 + 3\theta_z B_z)}}{(1 + \theta_z B_z)} K = \pm c_s \left( 1 + \frac{1}{2} \theta_z B_z \right) K. \quad (3.78)$$

Logo, a velocidade de grupo é

$$v_g = \left| \frac{d\omega}{dK} \right| = c_s \left( 1 + \frac{1}{2} \theta_z B_z \right). \quad (3.79)$$

Ou ainda, escrevendo a equação acima como segue,

$$\frac{v_g - c_s}{c_s} = \frac{1}{2} \theta_z B_z, \quad (3.80)$$

observamos que a velocidade de grupo tem um caráter supersônico devido a não-comutatividade. Lembrando que  $\Theta = \theta_z B_z$ , podemos substituir (3.72) na equação acima.

Logo,

$$\frac{v_g - c_s}{c_s} = \frac{\Delta T}{10T_H}, \quad (3.81)$$

percebemos que a diferença de velocidade está relacionada com a diferença de temperatura. Assim, quando temos uma variação nula para a temperatura ( $\Delta T = 0$ ), o que significa que escolhemos  $\Theta = 0$ , temos que a velocidade de grupo é a própria velocidade do som ( $v_g = c_s$ ). Mais uma vez, podemos verificar que quando tomamos o limite de  $\theta \rightarrow 0$  voltamos ao caso anterior, no qual nossas coordenadas eram comutativas,

$$v_g = \left| \frac{d\omega}{dK} \right| = c_s \quad (3.82)$$

e observamos que a velocidade máxima é a própria velocidade da onda sonora.

## Capítulo 4

# Cálculo da temperatura Hawking e da entropia em um espaço-tempo não-comutativo

O tunelamento, ou efeito túnel, é um fenômeno puramente quântico, que explica o fato de uma partícula ultrapassar um estado de energia que antes era proibido classicamente. Observamos este efeito quando estudamos o problema da barreira de potencial, que nos mostra que quanticamente é permitido que uma partícula ultrapasse barreiras de potenciais mesmo que sua energia cinética seja menor que a energia potencial da barreira (GASIOROWICZ, 1979).

Como já vimos, nesta dissertação, a radiação Hawking é a emissão de radiação causada por partículas que são emitidas nas proximidades do horizonte de eventos, seja isto para o buraco negro usual ou acústico, o que diferencia é que para este segundo, estas partículas são os fônons.

Iremos considerar a emissão de fônons no horizonte de eventos acústicos para calcular a temperatura através do Tunelamento. Utilizaremos a métrica não comutativa que obtivemos no capítulo 2. Porém, iremos considerar o espaço em  $(2 + 1)D$ , e isto resulta em alguma diferença na maneira de escrever a velocidade. No que segue, usaremos o método de Hamilton-Jacobi e a aproximação WKB para facilitar a resolução das equações de movimento. Neste momento, iremos calcular a probabilidade de tunelamento da partícula emitida na radiação Hawking e veremos que ela está relacionada com a Temperatura Hawking. Desta forma, encontraremos a temperatura e observaremos se o

resultado é consistente, ou não, com o método utilizado no capítulo anterior.

A fim de relembrar, a Lagrangeana não-comutativa é escrita trocando os produtos dos campos pelo produto Moyal, como mostrado abaixo:

$$\hat{\mathcal{L}} = -\frac{1}{4}\hat{F}_{\mu\nu} * \hat{F}^{\mu\nu} + (D_\mu \hat{\phi})^* \star D^\mu \hat{\phi} + m^2 \hat{\phi}^* \star \hat{\phi} - b \hat{\phi}^* \star \hat{\phi} \star \hat{\phi}^* \star \hat{\phi}. \quad (4.1)$$

Se voltarmos ao capítulo anterior veremos que após alguns cálculos, partindo desta lagrangeana, chegamos na seguinte métrica:

$$ds^2 = \frac{b\rho_0}{2c_s\sqrt{f}} [g_{tt}dt^2 + g_{it}dx^i dt + g_{jt}dtdx^j + g_{ij}dx^i dx^j],$$

onde seus elementos são dados por

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -[(1 - 3\vec{\theta} \cdot \vec{B})c_s^2 - (1 + 3\vec{\theta} \cdot \vec{B})v^2 + 2(\vec{\theta} \cdot \vec{v})(\vec{B} \cdot \vec{v}) - (\vec{\theta} \times \vec{E}) \cdot \vec{v}], \\ g_{tj} &= -\frac{1}{2}(\vec{\theta} \times \vec{E})^j (c_s^2 + 1) - \left[2(1 + 2\vec{\theta} \cdot \vec{B}) - (\vec{\theta} \times \vec{E}) \cdot \vec{v}\right] \frac{v^j}{2} + \frac{B^j}{2}(\vec{\theta} \cdot \vec{v}) + \frac{\theta^j}{2}(\vec{B} \cdot \vec{v}), \\ g_{it} &= -\frac{1}{2}(\vec{\theta} \times \vec{E})^i (c_s^2 + 1) - \left[2(1 + 2\vec{\theta} \cdot \vec{B}) - (\vec{\theta} \times \vec{E}) \cdot \vec{v}\right] \frac{v^i}{2} + \frac{B^i}{2}(\vec{\theta} \cdot \vec{v}) + \frac{\theta^i}{2}(\vec{B} \cdot \vec{v}), \\ g_{ij} &= [(1 + \vec{\theta} \cdot \vec{B})(1 + c_s^2) - (1 + \vec{\theta} \cdot \vec{B})v^2 - (\vec{\theta} \times \vec{E}) \cdot \vec{v}]\delta^{ij} + (1 + \vec{\theta} \cdot \vec{B})v^i v^j. \\ f &= [(1 - 2\vec{\theta} \cdot \vec{B})(1 + c_s^2) - (1 + 4\vec{\theta} \cdot \vec{B})v^2] - 3(\vec{\theta} \times \vec{E}) \cdot \vec{v} + 2(\vec{B} \cdot \vec{v})(\vec{\theta} \cdot \vec{v}). \end{aligned} \quad (4.2)$$

No que segue, iremos considerar a métrica obtida para dois casos, o setor magnético puro ( $\vec{B} \neq 0$  e  $\vec{E} = 0$ ) e o setor elétrico puro ( $\vec{E} \neq 0$  e  $\vec{B} = 0$ ). Para cada um deles iremos utilizar o método do tunelamento via o formalismo de Hamilton-Jacobi para calcular a temperatura Hawking.

## 4.1 Setor magnético puro

O elemento de linha acústico, dado por (4.2), para o setor magnético puro, em coordenadas polares, no espaço de  $(2+1)D$  é escrita como mostrado abaixo:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -(1 + \theta_z B_z) \{ [(1 - 3\theta_z B_z)c_s^2 - (1 + 3\theta_z B_z)(v_r^2 + v_\phi^2)] dt^2 \\ &\quad - 2(1 + 2\theta_z B_z)(v_r dr + v_\phi r d\phi) dt + (1 + \theta_z B_z)(dr^2 + r^2 d\phi^2) \}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde  $B_z$  é a magnitude do campo magnético na direção  $z$ ,  $\theta_z$  é o parâmetro da não-comutatividade,  $c_s = \sqrt{d\hbar/d\rho}$  é a velocidade da luz no fluido e  $v$  a velocidade do fluido.

Considerando que o potencial velocidade em coordenadas polares é  $\psi(r, \phi) = D \ln r + R\phi$ , podemos definir a velocidade como sendo

$$\vec{v} = \frac{D}{r} \hat{r} + \frac{R}{r} \hat{\phi}, \quad (4.4)$$

onde  $R$  e  $D$  são a constante de rotação e a taxa de drenagem do fluxo de fluido, respectivamente.

Reescrevendo a coordenada temporal e a coordenada azimutal, temos:

$$\begin{aligned} d\tau &= dt + \frac{(1 + 2\theta_z B_z) Dr dr}{[(1 - 3\theta_z B_z) c_s^2 r^2 - (1 + 3\theta_z B_z) D^2]}, \\ d\varphi &= d\phi + \frac{DR dr}{r[c_s^2 r^2 - D^2]}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Substituindo as equações (4.4) e (4.5) em (4.3), reescrevemos a métrica como

$$\begin{aligned} ds^2 &= -(1 - 2\Theta) \left[ 1 - \frac{(1 + 6\Theta)(D^2 + R^2)}{c_s^2 r^2} \right] d\tau^2 + \tilde{\theta} \left[ 1 - \frac{(1 + 6\Theta)A^2}{c_s^2 r^2} \right]^{-1} dr^2 \\ &\quad - \frac{2\tilde{\theta}^2 R}{c_s} d\varphi d\tau + \tilde{\theta} r^2 d\varphi^2, \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde  $\Theta = \theta_z B_z$  e  $\tilde{\theta} = 1 + 2\Theta$ .

Lembrando que o raio do horizonte é obtido quando fazemos  $g_{rr}(r_h) \rightarrow \infty$ , temos que

$$\tilde{r}_h = (1 + 6\Theta)^{1/2} r_h, \quad r_h = \frac{|D|}{c_s}. \quad (4.7)$$

Usando a relação acima, para o raio do horizonte modificado pela não-comutatividade, e o fato de não haver rotação ( $B = 0$ ), temos que da métrica dada por (4.6) resulta em

$$ds^2 = -f(r) d\tau^2 + f(r)^{-1} dr^2 + \tilde{\theta} r^2 d\varphi^2, \quad (4.8)$$

onde  $f(r) = (1 - 2\Theta) \left( 1 - \frac{\tilde{r}_h^2}{r^2} \right)$ , com  $c_s = 1$ .

Como já foi dito, a temperatura Hawking será calculada pelo método de tunelamento via o formalismo de Hamilton-Jacobi. Obtida a métrica acima podemos aplicar esse método, que consiste em utilizar a aproximação WKB na equação de Klein-Gordon e reescrevê-la para a ordem mais baixa de  $\hbar$ ; feito isto, utilizaremos o formalismo de Hamilton-Jacobi. Prosseguindo com os cálculos, iremos calcular a probabilidade de tunelamento da partícula e assim obteremos o valor da temperatura.

Por outro lado a equação de Klein-Gordon é dada por

$$\left[ \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu) - \frac{m^2}{\hbar^2} \right] \Phi = 0, \quad (4.9)$$

onde  $m$  é a massa da partícula escalar.

A aproximação WKB nos permite escrever o potencial como uma função exponencial da ação  $\mathcal{I}$ , como segue

$$\Phi = \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \mathcal{I}(t, r, \varphi) \right], \quad (4.10)$$

substituindo a aproximação WKB na equação de Klein-Gordon e considerando apenas a ordem mais baixa de  $\hbar$ , temos que

$$g^{\mu\nu} \partial_\mu \mathcal{I} \partial_\nu \mathcal{I} + m^2 = 0, \quad (4.11)$$

assim, comparando com a métrica (4.6), temos que:

$$-\frac{1}{f(r)} (\partial_t \mathcal{I})^2 + f(r) (\partial_r \mathcal{I})^2 + \frac{1}{\tilde{\theta} r^2} (\partial_\varphi \mathcal{I})^2 + m^2 = 0. \quad (4.12)$$

Do método de Hamilton-Jacobi podemos supor uma solução do tipo

$$\mathcal{I} = -Et + W(r) + J_\varphi \varphi, \quad (4.13)$$

como consequência, temos que

$$\partial_t \mathcal{I} = -E, \quad \partial_r \mathcal{I} = \frac{dW(r)}{dr}, \quad \partial_\varphi \mathcal{I} = J_\varphi, \quad (4.14)$$

onde  $J_\varphi$  é constante.

Substituindo (4.14) em (4.12), e colocando  $-1/f(r)$  em evidência, encontramos que

$$W(r) = \frac{1}{f(r)} \int \sqrt{E^2 - f(r) \left[ m^2 - \frac{J^2}{\tilde{\theta} r^2} \right]} dr; \quad (4.15)$$

próximo ao horizonte de eventos, quando  $r \rightarrow \tilde{r}_H$ , temos que  $f(r) \approx 2k(r - \tilde{r}_h)$ , onde  $k$  é a gravidade de superfície do horizonte acústico, dada por (2.64). Substituindo esta aproximação na equação acima, temos que ela é reescrita da seguinte maneira

$$W(r) = \frac{1}{2k} \int \frac{1}{(r - \tilde{r}_h)} \sqrt{E^2 - 2k(r - \tilde{r}_h) \left( m^2 - \frac{J^2}{\tilde{\theta} r^2} \right)} dr. \quad (4.16)$$

Com isso, temos que a equação (4.13) torna-se:

$$\mathcal{I} = -Et + \frac{1}{2k} \int \frac{1}{(r - \tilde{r}_h)} \sqrt{E^2 - 2k(r - \tilde{r}_h) \left( m^2 - \frac{J^2}{\tilde{\theta} r^2} \right)} dr + J_\varphi \varphi; \quad (4.17)$$

utilizando o Teorema de Cauchy,

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0), \quad (4.18)$$

para resolver a integral da equação acima, temos

$$\mathcal{I} = -Et + \frac{\pi i E}{k} + J_\varphi \varphi. \quad (4.19)$$

Por outro lado, a probabilidade de tunelamento é calculada pela seguinte equação (ALMEIDA, 2011)

$$\Gamma = e^{-2Im(\mathcal{I})} = e^{-2\pi E/k}, \quad (4.20)$$

enquanto a função de partição do ensemble canônico, que nos permite calcular a probabilidade de uma partícula ocupar um determinado microestado  $j$ , em nosso modelo seria a probabilidade da partícula atravessar a barreira de potencial, temos que  $\Gamma \simeq \exp(-\beta E)$ . Onde o termo da exponencial é conhecido como fator de Boltzmann e  $\beta = 1/K_B T$ . Logo, se compararmos as duas probabilidades, a de tunelamento e a dada pelo ensemble canônico, temos que a temperatura Hawking corrigida é

$$\tilde{T}_H = \frac{k}{2\pi}; \quad (4.21)$$

fizemos  $K_B = 1$  e  $T = \tilde{T}_H$ .

Utilizando a equação (2.64) para calcular a superfície de gravidade  $k$ , temos que

$$k = \frac{1 - 2\Theta}{\tilde{r}_H}, \quad (4.22)$$

usando este valor na temperatura, obtemos

$$\tilde{T}_H = \frac{1 - 2\Theta}{2\pi\tilde{r}_H}. \quad (4.23)$$

Devemos lembrar que o raio do horizonte corrigido,  $\tilde{r}_H$ , foi encontrado no início desta seção e é dado pela equação (4.7). Substituindo-o em (4.23), temos que

$$\tilde{T}_H = \frac{1}{2\pi r_H} (1 + 2\Theta) (1 + 6\Theta)^{-1/2}, \quad (4.24)$$

expandindo para os termos de primeira ordem em  $\Theta$ , finalizamos encontrando que a temperatura Hawking corrigida pela não-comutatividade é dada por:

$$\tilde{T}_H = \frac{1}{2\pi r_H} (1 - 5\Theta). \quad (4.25)$$

Observe que seu resultado é coerente com o encontrado no capítulo anterior, quando utilizamos o outro método. Portanto, vemos que o método do tunelamento é consistente

para calcularmos a temperatura Hawking de um buraco negro acústico. E assim como no capítulo (3), a temperatura é corrigida por um fator  $1 - 5\Theta$ ,

$$\tilde{T}_H = (1 - 5\Theta) T_H. \quad (4.26)$$

Note que, para o setor magnético puro, a presença da não-comutatividade resulta numa diminuição da temperatura Hawking por um fator  $5\Theta$ .

### 4.1.1 A entropia estatística

Já é bem conhecido da literatura, que é possível compreender o conceito de entropia usando a segunda lei da termodinâmica. Ao considerar um sistema termodinâmico fechado, temos que a entropia do sistema aumenta no caso em que o processo é irreversível; e permanece constante quando ele for reversível (HALLIDAY, 2009). Em outras palavras, é possível calcular quão irreversível é o processo através da entropia, ou como se costuma dizer, podemos calcular a "desordem" do sistema.

Visto que a entropia é uma quantidade termodinâmica que está relacionada com a temperatura, nesta subseção iremos calcular a entropia corrigida pela não-comutatividade, para o setor magnético puro, utilizando o valor da temperatura encontrado na presente seção. Para isto, vamos considerar o Princípio da Incerteza Generalizado (MAJUMDER, 2013; TAWFIL E DIAB, 2014) como uma extensão de (KEMPF, MANGANO, MANN, 1995)

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar \left( 1 - \frac{\alpha l_p}{\hbar} \Delta p + \frac{\alpha^2 l_p^2}{\hbar^2} (\Delta p)^2 \right), \quad (4.27)$$

onde  $\alpha$  é um parâmetro positivo adimensional,  $l_p = \sqrt{\hbar G/c^3} = M_p G/c^2 \approx 10^{-35} m$  é o comprimento de Plank e  $M_p = \sqrt{\hbar c/G}$  é a massa de Plank. Uma vez que  $G$  é a constante de Newton, os termos de correção na relação de incerteza, ocorrem devido aos efeitos da gravidade.

Escrevendo a inequação (4.27) da seguinte maneira,

$$\frac{\alpha^2 l_p^2}{\hbar} (\Delta p)^2 + (\alpha l_p + \Delta x) \Delta p + \hbar \leq 0, \quad (4.28)$$

vemos claramente que temos uma inequação do 2º grau, cuja solução é dada por:

$$\Delta p \geq \frac{\hbar(\Delta x + \alpha l_p)}{2\alpha^2 l_p^2} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{4\alpha^2 l_p^2}{(\Delta x + \alpha l_p)^2}} \right), \quad (4.29)$$



onde escolhemos o sinal negativo da solução.

Dado que  $l_p/\Delta x$  é muito pequeno comparado com a unidade, podemos expandir a equação acima em série de Taylor. Portanto,

$$\Delta p \geq \frac{1}{\Delta x} \left[ 1 - \frac{\alpha}{2\Delta x} + \frac{\alpha^2}{2(\Delta x)^2} + \cdots \right], \quad (4.30)$$

onde escolhemos o sistema de coordenadas em que  $G = c = k_B = 1$ . Logo, podemos também escolher  $\hbar = 1$ , e assim temos  $l_p = 1$ . Nestas unidades o Princípio da Incerteza torna-se

$$\Delta x \Delta p \geq 1. \quad (4.31)$$

Temos ainda que, se escrevermos o Princípio da Incerteza para a energia, a equação acima é reescrita como

$$E \Delta x \geq 1, \quad (4.32)$$

onde  $E$  é a energia da partícula quântica. Usando (4.32) em (4.30), temos que

$$E_G \geq E \left[ 1 - \frac{\alpha}{2(\Delta x)} + \frac{\alpha^2}{2(\Delta x)^2} + \cdots \right], \quad (4.33)$$

sendo  $E_G$  a energia corrigida. Por outro lado, a probabilidade de tunelamento para a partícula com energia corrigida é dada por

$$\Gamma \simeq \exp[-2Im\mathcal{I}] = \frac{2\pi E_G}{k}, \quad (4.34)$$

comparando com o fator de Boltzmann, obtemos a temperatura do buraco negro acústico

$$T = \tilde{T}_H \left[ 1 - \frac{\alpha}{2(\Delta x)} + \frac{\alpha^2}{2(\Delta x)^2} + \cdots \right]^{-1}; \quad (4.35)$$

já vimos que

$$\tilde{T}_H = \frac{1 - 2\Theta}{2\pi\tilde{r}_H}, \quad (4.36)$$

com isso, da equação (4.35), obtemos a temperatura corrigida devido ao Princípio da Incerteza Generalizado

$$T = \frac{(1 - 2\Theta)}{2\pi\tilde{r}_H} \left[ 1 - \frac{\alpha}{4\tilde{r}_H} + \frac{\alpha^2}{8\tilde{r}_H^2} + \cdots \right]^{-1}, \quad (4.37)$$

aqui fizemos  $\Delta x = 2\tilde{r}_H$ . Aqui, a entropia depende apenas da geometria do horizonte. Assim, usando as leis da termodinâmica de buracos negros, chegamos a entropia em termos da área do horizonte do buraco negro acústico como

$$\begin{aligned} S &= \int \frac{dE}{T} = \int \frac{\kappa dA}{8\pi T} = \int \frac{d\tilde{A}}{8\pi\tilde{r}_h T} = (1+2\Theta) \int \frac{d\tilde{A}}{4} \left[ 1 - \frac{\pi\alpha}{2\tilde{A}} + \frac{\pi^2\alpha^2}{2\tilde{A}^2} + \dots \right], \\ &= (1+2\Theta) \left[ \frac{\tilde{A}}{4} - \frac{\pi\alpha}{8} \ln \frac{\tilde{A}}{4} - \frac{\pi^2\alpha^2}{32\tilde{A}/4} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Escrevendo a expressão da entropia em termos do raio do horizonte, temos

$$S = (1+2\Theta) \left[ \frac{2\pi\tilde{r}_h}{4} - \frac{\pi\alpha}{8} \ln \frac{2\pi\tilde{r}_h}{4} - \frac{\pi^2\alpha^2}{8} \tilde{T}_h + \dots \right], \quad (4.39)$$

onde  $\tilde{A} = 2\pi\tilde{r}_H = (1+3\Theta)A$  é a área do horizonte do buraco negro acústico não-comutativo e  $A = 2\pi r_H$  é a área do buraco negro acústico. Vemos claramente que  $\tilde{A}$  é realmente dado desta forma, se voltarmos a equação que define o raio do horizonte corrigido, (4.7), e a expandirmos para ordem mais baixa de  $\Theta$ .

Os termos de correção são devido a efeitos quânticos. O segundo é um termo de correção logarítmica em ordem  $\alpha$ , que é semelhante aos resultados existentes para buraco negro gravitacional em 4 dimensões e que também são derivados por outros métodos. O terceiro termo é um termo de correção para a entropia de área, de ordem  $\alpha^2$ , que é proporcional à temperatura de radiação,  $\tilde{T}_h = (1-5\Theta)T_h$ , do buraco negro acústico não-comutativo. A equação (4.39) pode ser escrita em termos do  $r_H$  como

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= \frac{S}{(1+2\Theta)} \\ &= (1+3\Theta) \frac{2\pi r_h}{4} - \frac{\pi\alpha}{8} \ln \frac{2\pi r_h}{4} - \frac{\pi^2\alpha^2}{8} (1-5\Theta)T_h - \frac{\pi\alpha}{8} \ln(1+3\Theta) + \dots \end{aligned} \quad (4.40)$$

Note que o termo logarítmico é obtido devido a contribuição  $\alpha(\Delta p)$  no Princípio da Incerteza Generalizado, enquanto no caso gravitacional, por exemplo no buraco negro de Schwarzschild, a correção logarítmica é obtida do termo quadrado  $\alpha^2(\Delta p)^2$ .

Então, para  $\alpha = 0$  e  $\Theta = 0$  nós reproduzimos a usual lei semiclássica da entropia de área de Bekenstein-Hawking,  $S = A/4 = 2\pi r_h/4$ .

Por outro lado, o estudo sobre a origem da entropia estatística de buraco negro tem sido amplamente explorado por diversos autores, dentre eles: Frolov e Novikov (FROLOV e NOVIKOV, 1993); Magán, Melnikov e Silva (MAGÁN, MELNIKOV e SILVA, 2014); Callan e Wilczek (CALLAN e WILCZEK, 1994); Casini, Huerta e Myers

(CASINI, HUERTA e MYERS, 2011). Solodukhin, Kaul e Majumdar em um de seus trabalhos calcularam correções para a entropia e obtiveram correções logarítmicas do tipo (SOLODUKHIN, 2011; KAUL E MAJUMDAR, 2000; KAUL E MAJUMDAR, 1998)

$$S \sim \frac{A}{4G} - \frac{3}{2} \ln \left( \frac{A}{4G} \right) + \text{const.} + \dots \quad (4.41)$$

Por esse motivo, comparando (4.40) com (4.41), percebemos que fazendo a troca  $\alpha = 12/\pi$ , os termos que multiplicam as correções da entropia se tornam equivalentes

$$\tilde{S} = (1 + 3\Theta) \frac{2\pi r_h}{4} - \frac{3}{2} \ln \frac{2\pi r_h}{4} - 18(1 - 5\Theta) T_h - \frac{9}{4} \ln [1 + 2\Theta + O(\Theta^2)] + \dots, \quad (4.42)$$

ou seja, a correção logarítmica resultante da entropia, torna-se  $-3/2 \ln(A/4)$ , que tem a mesma correção para buracos negros gravitacionais em 4 dimensões. O último termo da equação acima é independente do raio do horizonte e corresponde ao termo extra que depende da carga conservada  $c = e(1 + 2\Theta)$ . Observe que tanto o termo logarítmico gravitacional quanto as correções devido a carga conservada são impostas pela existência de correções lineares no princípio da incerteza generalizado. Estamos considerando que a carga é obtida das equações de movimento do campo  $A_\mu$  (setor magnético puro) da lagrangiana,

$$(\vec{\nabla} \times \vec{B})^j = 2e\rho(1 + 2\Theta)u^j, \quad j = 1, 2. \quad (4.43)$$

Portanto, em nosso modelo, considerando o princípio da incerteza generalizado dado por (4.27), obtivemos correções logarítmicas semelhantes a Kaul e Majumdar (KAUL e MAJUMDAR, 2000) e um termo extra que depende da carga conservada de um modelo análogo obtido em (CARLIP, 2000),

$$S \sim \frac{A}{4G} - \frac{3}{2} \ln \left( \frac{A}{4G} \right) + \ln[F(Q)] + \text{const.} + \dots \quad (4.44)$$

onde  $F(Q)$  é uma função do momento angular e da carga conservada.

## 4.2 Setor elétrico puro

Na presente seção calcularemos a temperatura Hawking para o setor elétrico puro ( $B = 0$  e  $E \neq 0$ ). Para tanto, devemos escrever a métrica (4.2) em  $(2+1)D$  como segue,

$$\begin{aligned}
ds^2 &= \frac{b\rho_0}{2c_s\sqrt{f}} \left\{ - \left[ c_s^2 - v^2 - \left( \vec{\theta} \times \vec{E} \right) \cdot \vec{v} \right] dt^2 \right. \\
&+ \left[ -\frac{1}{2} \left( \vec{\theta} \times \vec{E} \right)^i (c_s^2 + 1) - \left( 2 - \left( \vec{\theta} \times \vec{E} \right) \cdot \vec{v} \right) \frac{v^i}{2} \right] dx^i dt \\
&+ \left[ -\frac{1}{2} \left( \vec{\theta} \times \vec{E} \right)^j (c_s^2 + 1) - \left( 2 - \left( \vec{\theta} \times \vec{E} \right) \cdot \vec{v} \right) \frac{v^j}{2} \right] dx^j dt \\
&+ \left. \left[ \left( 1 + c_s^2 + v^2 - \left( \vec{\theta} \times \vec{E} \right) \cdot \vec{v} \right) \delta^{ij} + v^i v^j \right] dx^i dx^j \right\}, \tag{4.45}
\end{aligned}$$

sendo  $f = (1 + c_s^2 - v^2) - 3(\vec{\theta} \times \vec{E}) \cdot \vec{v}$ . Considerando apenas a primeira ordem em  $\theta$  e tomando o limite não-relativístico,  $v \ll 1$  e  $c_s \ll 1$ , temos, da métrica acima, que

$$\begin{aligned}
ds^2 &= \frac{b\rho_0}{2c_s} \left( 1 + \frac{3}{2} \left( \vec{\theta} \times \vec{E} \right) \cdot \vec{v} \right) \left\{ - \left[ c_s^2 - v^2 - \left( \vec{\theta} \times \vec{E} \right) \cdot \vec{v} \right] dt^2 \right. \\
&+ \left. \left[ \left( \vec{\theta} \times \vec{E} \right) + 2\vec{v} \right] \cdot d\vec{x} dt + \left[ 1 - \left( \vec{\theta} \times \vec{E} \right) \cdot \vec{v} \right] d\vec{x} \cdot d\vec{x} \right\}. \tag{4.46}
\end{aligned}$$

Escrevendo-a em coordenadas polares, temos que a velocidade é dada por  $\vec{v} = v_r \hat{r} + v_\phi \hat{\phi}$ . Assim,

$$\begin{aligned}
ds^2 &= \frac{b\rho_0}{2c_s} \left( 1 + \frac{3}{2} \theta \vec{E} \cdot \vec{v} \right) \left\{ -[c^2 - (v_r^2 + v_\phi^2 + \theta \mathcal{E}_r v_r + \theta \mathcal{E}_\phi v_\phi)] dt^2 - 2 \left( v_r + \frac{\theta \mathcal{E}_r}{2} \right) dr dt \right. \\
&- \left. 2 \left( v_\phi + \frac{\theta \mathcal{E}_\phi}{2} \right) r d\phi dt + (1 - \theta \mathcal{E}_r v_r - \theta \mathcal{E}_\phi v_\phi) (dr^2 + r^2 d\phi^2) \right\}, \tag{4.47}
\end{aligned}$$

onde  $\theta \mathcal{E}_r = \theta(\vec{n} \times \vec{E})_r$ ,  $\theta \mathcal{E}_\phi = \theta(\vec{n} \times \vec{E})_\phi$  e  $E$  é a magnitude do campo elétrico. Vamos agora considerar as seguintes transformações nas coordenadas temporal e azimutal,

$$\begin{aligned}
d\tau &= dt + \frac{\tilde{v}_r dr}{(c_s^2 - \tilde{v}_r^2)}, \\
d\varphi &= d\phi + \frac{\tilde{v}_\phi \tilde{v}_r dr}{r(c_s^2 - \tilde{v}_r^2)}, \tag{4.48}
\end{aligned}$$

onde definimos que  $\tilde{v}_r = v_r + \frac{\theta \mathcal{E}_r}{2}$  e  $\tilde{v}_\phi = v_\phi + \frac{\theta \mathcal{E}_\phi}{2}$ . Considerando que o fluido possui o potencial velocidade,  $\psi(r, \varphi) = D \ln r + R\varphi$ , temos que a velocidade é escrita como

$$\vec{v} = \frac{D}{r} \hat{r} + \frac{R}{r} \hat{\phi}. \tag{4.49}$$

Logo, a métrica torna-se

$$\begin{aligned}
ds^2 &= \frac{b\rho_0}{2c_s} \left( 1 + \frac{3\theta\mathcal{E}_r D}{2r} + \frac{3\theta\mathcal{E}_\phi R}{2r} \right) \left\{ - \left[ 1 - \frac{(D^2 + R^2 + \theta\mathcal{E}_r D r + \theta\mathcal{E}_\phi R r)}{c_s^2 r^2} \right] d\tau^2 \right. \\
&+ \left( 1 - \frac{\theta\mathcal{E}_r D}{r} - \frac{\theta\mathcal{E}_\phi R}{r} \right) \left[ \left( 1 - \frac{D^2 + \theta\mathcal{E}_r D r}{c_s^2 r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\varphi^2 \right] \\
&\left. - 2 \left( \frac{R}{c_s r} + \frac{\theta\mathcal{E}_\phi}{2c_s} \right) r d\varphi d\tau \right\}. \tag{4.50}
\end{aligned}$$

Em resumo, fizemos estas transformações e substituições para obter uma métrica acústica não-comutativa, em primeira ordem de  $\theta$  e em coordenadas polares para o setor elétrico puro.

Calculando o raio do horizonte corrigido pela não-comutatividade, temos respectivamente que

$$\tilde{r}_{h\pm} = r_h \left[ \frac{\theta\mathcal{E}_r}{2c_s} \pm 1 \right], \tag{4.51}$$

onde  $r_h = |D|/c_s$  é o raio do horizonte para o caso usual. Quando  $\theta = 0$ , temos que  $\tilde{r}_e = r_e$  e  $\tilde{r}_h = r_h$ .

Assim como no caso do setor magnético puro consideramos que não existia rotação, também consideraremos aqui, no setor elétrico puro. Portanto, fazendo  $R = 0$  e  $\mathcal{E}_\phi = \iota$ , com  $c_s = 1$ , temos

$$ds^2 = -f(r)d\tau^2 + \left( 1 - \frac{4\theta\mathcal{E}_r r_h}{r} \right) f(r)^{-1} dr^2 + \left( 1 - \frac{5\theta\mathcal{E}_r r_h}{2r} \right) r^2 d\varphi^2, \tag{4.52}$$

onde

$$f(r) = \left( 1 + \frac{3\theta\mathcal{E}_r r_h}{2r} \right) \left( 1 - \frac{r_h^2}{r^2} - \frac{\theta\mathcal{E}_r r_h}{r} \right). \tag{4.53}$$

Relembrando a equação (2.66), vemos que a temperatura Hawking é dada por

$$\tilde{T}_H = \frac{k}{2\pi} = \frac{f'(r_{H+})}{4\pi}, \tag{4.54}$$

então, calculando-a, temos que

$$\tilde{T}_H = \frac{1}{2\pi r_H} \left( 1 + \frac{\theta\mathcal{E}_r}{2} \right) = T_H \left( 1 + \frac{\theta\mathcal{E}_r}{2} \right), \tag{4.55}$$

lembrando que  $T_H = 1/2\pi r_H$ . Ou ainda, escrevendo em termos do  $\tilde{r}_{H+}$ , obtemos a temperatura corrigida

$$\tilde{T}_H = \frac{1}{2\pi\tilde{r}_{H+}} (1 + \theta\mathcal{E}_r) + \mathcal{O}(\theta^2), \tag{4.56}$$

observe que, neste caso, a presença do campo elétrico resulta em um aumento da temperatura Hawking por um fator  $\theta\mathcal{E}_r$ .

### 4.2.1 A entropia estatística

Iremos calcular, agora, a entropia estatística do setor elétrico puro. Para tanto, devemos repetir o procedimento feito na seção (4.1.1). Partimos do princípio da incerteza generalizado (GUP), e resolvendo a inequação de segundo grau, escrevemos o momento como um série de Taylor. Usando o princípio da incerteza para a energia encontramos um valor de energia corrigida; por conseguinte, da equação da probabilidade de tunelamento (4.20), encontramos a temperatura corrigida pelo GUP e por fim, utilizando esta temperatura, calculamos a entropia estatística.

Lembrando que a temperatura corrigida pelo GUP é dada por :

$$T = \tilde{T}_H \left[ 1 - \frac{\alpha}{2(\Delta x)} + \frac{\alpha^2}{2(\Delta x)^2} + \dots \right]^{-1}, \quad (4.57)$$

iremos substituir o valor de  $\tilde{T}_H$  para o setor elétrico puro, que é dado pelo equação (4.56). Assim, obtemos que

$$T = \frac{(1 + \theta \mathcal{E}_r)}{2\pi \tilde{r}_{h+}} \left[ 1 - \frac{\alpha}{4\tilde{r}_{h+}} + \frac{\alpha^2}{8\tilde{r}_{h+}^2} + \dots \right]^{-1}, \quad (4.58)$$

este valor de temperatura é corrigido pelo Princípio da Incerteza Generalizado. Com isso, a entropia estatística é que é dada pela seguinte equação

$$S = \int \frac{dE}{T} = \int \frac{d\tilde{A}}{8\pi \tilde{r}_h T}, \quad (4.59)$$

torna-se:

$$S = (1 - \theta \mathcal{E}_r) \left[ \frac{2\pi \tilde{r}_{h+}}{4} - \frac{\pi \alpha}{8} \ln \frac{2\pi \tilde{r}_{h+}}{4} - \frac{\pi^2 \alpha^2}{8} \tilde{T}_h + \dots \right], \quad (4.60)$$

onde  $\tilde{A} = 2\pi \tilde{r}_{h+}$  é a área do horizonte para um buraco negro acústico não-comutativo. Podemos ainda, reescrever a entropia em termos do raio  $r_h$ . Substituindo o raio do horizonte corrigido, temos que  $\tilde{A} = (1 + \theta \varepsilon_r/2)A$  e  $A = 2\pi r_h$ . Assim,

$$\tilde{S} = \frac{S}{(1 - \theta \mathcal{E}_r)} = \left( 1 + \frac{\theta \mathcal{E}_r}{2} \right) \frac{2\pi r_h}{4} - \frac{\pi \alpha}{8} \ln \frac{2\pi r_h}{4} - \frac{\pi^2 \alpha^2}{8} \left( 1 + \frac{\theta \mathcal{E}_r}{2} \right) T_h - \frac{\pi \alpha}{8} \ln \left( 1 + \frac{\theta \mathcal{E}_r}{2} \right) + \dots$$

Novamente observamos que os termos de correção são devidos aos efeitos quânticos. Note que o primeiro termo é devido a correção não-comutativa, o segundo é uma correção logarítmica que aparece em primeira ordem em  $\alpha$ , como no caso em gravitacional 3 + 1 dimensões, e o terceiro termo de correção é proporcional à temperatura de radiação do buraco negro acústico.

Escolhendo mais uma vez  $\alpha = 12/\pi$ , devido a comparação com o valor já conhecido da entropia gravitacional (4.41), temos

$$\tilde{S} = \left(1 + \frac{\theta\mathcal{E}_r}{2}\right) \frac{2\pi r_h}{4} - \frac{3}{2} \ln \frac{2\pi r_h}{4} - 18 \left(1 + \frac{\theta\mathcal{E}_r}{2}\right) T_h - \frac{3}{2} \ln \left(1 + \frac{\theta\mathcal{E}_r}{2}\right) + \dots \quad (4.61)$$

o último termo é independente do raio do horizonte e corresponde a um termo extra que depende de uma carga conservada  $c = e(1 + \theta\mathcal{E}/2)$ . Esta conservação da carga é obtida das equações de movimento para o campo  $A_\mu$  (setor elétrico puro) da lagrangeana.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 2e\rho w \left(1 + \frac{\theta\mathcal{E}_r}{2}\right), \quad (4.62)$$

onde temos considerado a normalização  $v_r \equiv u_r/w = 1$ , uma vez que próximo ao horizonte  $v_r \sim c_s = 1$ .

Perceba que os resultados encontrados para o setor elétrico puro se assemelham aos encontrados no setor magnético no que se refere aos termos de correções, ambos possuem correções não-comutativas, correções devido ao GUP e termos de carga conservada.

# Conclusões

Na presente dissertação, fizemos um estudo a cerca de análogos acústicos de buracos negros em espaço-tempo não-comutativo, mais especificadamente sobre temperatura Hawking e cálculo da entropia.

No primeiro capítulo de revisão, observamos que quando um fluido em movimento interage com o som à uma velocidade supersônica, uma região de buraco negro acústico é criada. Reproduzindo isto matematicamente, através de perturbações nas quantidades hidrodinâmicas do meio, obtivemos uma métrica característica de um buraco negro acústico.

No segundo capítulo de revisão, inserimos a não-comutatividade na métrica, com o objetivo de verificar as correções que essa teoria trás para o estudo da temperatura Hawking de buracos negros acústicos.

No ultimo capítulo, apresentamos os nossos resultados. Dada a métrica não-comutativa, a analisamos em dois casos: para o setor puramente magnético, no qual, como o próprio nome já sugere, consideramos que só existe campo magnético, e para um setor puramente elétrico, onde existe apenas os termos de campo elétrico. Em ambos os casos, consideramos que a radiação Hawking é emitida pelo ponto de vista do tunelamento. Um dos resultados obtidos foi que a não-comutatividade resulta em uma diminuição da temperatura para o setor magnético puro e em um aumento da temperatura para o setor elétrico puro. Consideramos, ainda, o principio da incerteza generalizado e a partir dele derivamos a temperatura não-comutativa e a entropia com correções deste principio. O principio da incerteza nos permite encontrar correções quânticas para a entropia de um buraco negro acústico não-comutativo. E encontramos para ambos os setores. Nos dois casos, verificamos que o primeiro termo de correção ocorre devido a não comutatividade e os demais termos, devido ao principio da incerteza generalizado. O segundo termo de correção, em primeira ordem em  $\alpha$  é de correção logarítmica; o terceiro, de segunda



ordem em  $\alpha$ , é um termo dependente da temperatura Hawking; e do último termo surge a existência de correções em termos de carga conservada.

# Referências Bibliográficas

- [1] ANACLETO, M. A. **Correção não-comutativa para o efeito Aharonov-Bohm: Uma abordagem da Teoria Quântica de Campos**. 82 folhas. Tese (Doutorado). Universidade de São Paulo, instituto de física- departamento de física matemática, 2004.
- [2] ANACLETO, M. A.; BRITO, F. A.; PASSOS, E. Acoustic Black Holes from Abelian Higgs Model with Lorentz Symmetry Breaking. **Physical Letters B**. vol 694, 2010, [arXiv:1004.5360 [hep-th]].
- [3] ANACLETO, M. A.; BRITO, F. A.; PASSOS, E. Superresonance effect from a rotating acoustic black hole and Lorentz symmetry breaking. **Physical Letters B**. vol 703, 2011 [arXiv:1101.2891 [hep-th]].
- [4] ANACLETO, M. A.; BRITO, F. A.; PASSOS, E. Supersonic Velocities in Noncommutative Acoustic Black Holes. **Physical Review D**. vol 85, 2012 [arXiv:1109.6298 [hep-th]],
- [5] ANACLETO, M. A.; BRITO, F. A.; PASSOS, E. Analogue Aharonov-Bohm effect in a Lorentz-violating background. **Physical Review D**. vol 86, 2012 [arXiv:1208.2615 [hep-th]].
- [6] ANACLETO, M. A.; BRITO, F. A.; PASSOS, E. Acoustic Black Holes and Universal Aspects of Area Products. [arXiv:1309.1486].
- [7] ANACLETO, M. A.; BRITO, F. A.; PASSOS, E. Supersonic Velocities in Noncommutative Acoustic Black Holes. **Physical Review D**. vol 87, 2013 [arXiv:1210.7739 ].

- [8] ANACLETO, M. A. et al., The entropy of the noncommutative acoustic black hole based on generalized uncertainty principle. **Physical Letters B.** vol 737, 2014, [arXiv:1405.2046 [hep-th]].
- [9] ANACLETO, M. A. et al., Quantum-corrected finite entropy of noncommutative acoustic black holes. **Annals of Physics.** vol 362, 2015.
- [10] ALMEIDA, Otávio Goldoni Quina. Análise de Processos Quânticos em Buracos Negros. Dissertação (Mestrado) - UFRJ, Instituto de Física , Programa de Pós-Graduação em Física, 2011.
- [11] AMORIM, R. G. G. et al., Função de Wigner-80 anos e as origens da geometria não-comutativa. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, vol 35, nº 3, setembro, 2013.
- [12] BANERJEE, R.; MAJHI, B. R. Quantum tunneling and back reaction. **Physical Review B.** vol 662, 2008.
- [13] BARCELÓ, Carlos; LIBERATI, Stefano; VISSER, Matt. Analogy Gravity. **Living Rev. Relativity**, vol 14, maio, 2011.
- [14] BEMFICA, Fábio Sperotto. **Dinâmica quântica de sistemas não-comutativos.** 72 f. Tese (Doutorado), Universidade Federal do rio Grande do Sul, Instituto de Física, 2009.
- [15] BICHL, A. A. et al., Perturbative Analysis of the Seiberg-Witten Map. **International Journal of Modern Physics A**, vol 17, nº 16 , fevereiro, 2002.
- [16] BILIC, N. Relativistic Acoustic Geometry .**Classical and Quantum Gravity.** vol 16, 1999.
- [17] BRUSTEIN, Ram; KUPFERMAN, Judy. Black hole entropy divergence and the uncertainty principle. **Physical Review D.** vol 83, 2011, [arXiv:1010.4157 [hep-th]].
- [18] CARLIP, S. Logarithmic corrections to black hole entropy from the Cardy formula. **Classical and Quantum Gravity.** VOL 17, 2000.

- [19] CALLAN, C. G.; WILCZEK, F. On geometric entropy. **Physical Review B**. vol 333, 1994.
- [20] CASINI, H.; HUERTA, M.; MYERS, R. C. Towards a derivation of holographic entanglement entropy. **Journal of High Energy Physics**. vol 1105, 2011, [arXiv:1102.0440 [hep-th]].
- [21] FABBRI, Alessandro. The analog of the Hawking effect in BECs. [arxiv.org/pdf/1411.7842].
- [22] FAGNOCCI, S. et al., Relativistic Bose-Einstein Condensates: a new system for analogue models of gravity. **New Journal of Physics**. 2010. arXiv:1001.1044[gr-qc]
- [23] FRESNEDA, Rodrigo. **Alguns problemas de quantização co teorias de fundos não-abelianos e em espaço-tempo não-comutativos**. 67 f. Tese (Doutorado), Instituto de física, USP, 2008.
- [24] FREITAS, Tiago Carlos Adorno. **Efeitos Clássicos e Quânticos em Teorias Não Comutativas**. 70 f. Tese (Doutorado), Instituto de Física, USP, 2013.
- [25] FROLOV, V.; NOVIKOV, I. Dynamical origin of the entropy of a black hole. **Physical Review D**. vol 48, 1993.
- [26] GARAY, L. J. et al., Sonic Analog of Gravitational Black Holes in Bose-Einstein Condensates. **Physical Review Letters**. vol 85, 2000.
- [27] GANGOPADHYAY, S.; DUTTA, A.; SAHA, A. Generalized uncertainty principle and black hole thermodynamics. **General Relativity and Gravitation**. vol 46, 2014, [arXiv:1307.7045 [gr-qc]].
- [28] GASIOROWICZ, Stephen. **Física Quântica**. Rio de Janeiro: Editora Guanabara, 1979.
- [29] GE, X.-H.; SIN, S.-J. Acoustic black holes for relativistic fluids. **Journal of High Energy Physics**. vol 1006, 2010 [arXiv:hep-th/1001.0371].
- [30] GIOVANAZZI, S.. hawking Radiation in Sonic Black Holes. **Physical Review Letters**. vol 94, 2005.

- [31] GHOSH, S. Noncommutativity in Maxwell Chern-Simons matter theory simulates Pauli magnetic coupling. **Modern Physics Letters A**. vol 20, 2005.
- [32] HAWKING, S. W. Particle creation by black holes, 1975. **Commun. Math. Phys.** 43, 199-220.
- [33] HAWKING, S. W.; GIBBONS, G. W. Cosmological event horizons, thermodynamics, and particle creation. **Physical Review Letters**, Cambridge, vol 15, n° 10, maio, 1977.
- [34] JACOBISON, A; PARENTANI, Renaud. An Echo of Black holes. **Scientific American**. vol 293, n° 6, dezembro, 2005.
- [35] KAUL, R. K.; MAJUMDAR, P. Quantum black hole entropy. **Physical Letters B**. vol 439, 1998.
- [36] KAUL, R. K.; MAJUMDAR, P. Logarithmic correction to the Bekenstein-Hawking entropy. **Physical Review letters**, vol 84, 2000.
- [37] KEMPF, A.; MANGANO, G.; MANN, R. B. Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation. **Physical Review D**. vol 52, 1995.
- [38] LAHAV, O. et al.; [arXiv0906.1337].
- [39] LEONHARDT, U.; PIWNICKI, P.. Relativistic Effects of Light in Moving Media with Extremely Low Group Velocity. **Physical Review Letters**. vol 84, 2000.
- [40] LEONHARDT, U.. A laboratory analogue of the event horizon using slow light in an atomic medium. **Nature**. vol 415, 2002.
- [41] MAGÁN, J. M.; MELNIKOV, D.; SILVA, M. R. O. Black Holes in AdS/BCFT and Fluid/Gravity Correspondence. **Journal of High Energy Physics**. vol 1411, 2014, [arXiv:1408.2580 [hep-th]].
- [42] MAJUMDER, B. Black Hole Entropy with minimal length in Tunneling formalism. **General Relativity and Gravitation**. vol 11, 2013, [arXiv:1212.6591 [gr-qc]].
- [43] MELO, Jilvan Lemos. **Quantização de Landau para quadrupolo elétrico**. 43 folhas. Dissertação (mestrado), Universidade Federal da Paraíba, departamento de física, 2010.

- [44] NOVELLO, M.; VISSER, M.; VOLOVIK, G.. Artificial Black Holes. **World Scientific**. Singapore, 2002.
- [45] PARIKH, M. K.; WILCZEK, F. Hawking radiation as tunneling. **Physical review letters**. vol 85, 2000.
- [46] PASHEV, Oktay k; LEE, Jyh-Hao. Self-dual vortices in Chern-simons hydrodynamics. **Theoretical and Mathematical Physics**, Editora Springer, vol 127, abril, 2001.
- [47] PHILBIN, T. G. et al.,. Fiber-optical analog of the event horizon. **Science**. vol 319, 2008.
- [48] RINALDI, M. Entropy of an acoustic black hole in Bose-Einstein condensates **Physical Review D**. vol 84, 2011.
- [49] RINALDI, M. The entropy of an acoustic black hole in Bose-Einstein condensates: transverse modes as a cure for divergences. **International Journal of Modern Physics D**. vol 22, 2013, [arXiv:1112.3596 [gr-qc]].
- [50] ROUSSEAUX, G. et al.,. Horizon effects for surface waves in wave channels and circular jumps. **Journal of Physics**. vol 10, 2008.
- [51] SCHÜTZHOLD, R.; UNRUH, W. G.. Gravity wave analogues of black holes. **Physical Review D**. vol 66, 2002.
- [52] SCHÜTZHOLD, R.; UNRUH, W. G.. Hawking Radiation in an Electromagnetic Waveguide?. **Physical Review Letters**. vol 95, 2005.
- [53] SEIBERG, N.; WITTEN, E. String Theory and Noncommutative Geometry. **Journal of High Energy Physics**. vol 9, 1999.
- [54] SHANKARANAYANAN, S.; SRINIVASAN, K.; PADMANABHAN, T. Method of complex paths and general covariance of Hawking radiation. **Modern Physics Letters A**. vol 16, 2001, [arXiv:gr-qc/0007022].
- [55] SHANKARANAYANAN, S.; SRINIVASAN, K.; PADMANABHAN, T. Hawking radiation in different coordinate settings: Complex paths approach. **Classical and Quantum Gravity**. vol 19, 2002, [arXiv:gr-qc/0010042].

- [56] SILVA, C. A. S.; BRITO, F. A. Quantum tunneling radiation from self-dual black holes. **Physical Letters B**. vol 725, 2013 [arXiv:1210.4472 [physics.gen-ph]].
- [57] SIMON, Keith R. **Mecânica**. Rio de Janeiro: Editora Campus, 1996.
- [58] SOLODUKHIN, S. N. Entanglement entropy of black holes. **Living Review Relativity**. vol 14, 2011, [arXiv:1104.3712 [hep-th]].
- [59] SRINIVASAN, K.; PADMANABHAN, T. Particle production and complex path analysis. **physical Review D** **60**. 1999, [arXiv:gr-qc/9812028]
- [60] SUSSKIND, Leonard; LINDESAY, James. **Black holes, information and the string theory revolution**. USA :World Scientific, 2005.
- [61] SZABO, Richard J. Quantum Field Theory on Noncommutative Spaces. **Physics Reports**. 2003
- [62] TAWFIK, A. N.; DIAB, A. M. Generalized Uncertainty Principle: Approaches and Applications. **International Journal of Modern Physics D**. VOL 23, 2014, [arXiv:1410.0206 [gr-qc]].
- [63] TEDESCO, Daniel Guimarães. **Um estudo sobre a teoria de campos no espaço-tempo não comutativo**. 52 f. Dissertação (mestrado), Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Física Armando Dias Tavares, 2010.
- [64] TONIATO, Júnior Diniz. **Modelo Acústico Análogo ao Buraco Negro de Schwarzschild**. 73 folhas. Dissertação (mestado) - Física, Universidade Federal do Espírito Santo, 2010.
- [65] UNRUH, W. G. Experimental Black-Hole Evaporation? **Physical Review Letters**. vol 46, 1981,
- [66] UNRUH, W. G.; SCHÜTZHOLD, R.. Large-scale non-locality in "doubly special relativity" with an energy-dependent speed of light. **Physical Review D**. vol 68, 2003.
- [67] VISSER, Matt. Acoustic black holes: horizons, ergospheres, and Hawking radiation. **Classical and Quantum Gravity**, Saint Louis, vol 15, dezembro, 1998.

- [68] VISSER, M.; MOLINA, C. Acoustic geometry for general relativistic barotropic irrotational fluid flow. 2010. [arXiv:1001.1310[hep-th]].
- [69] VOLOVIK, G. **The Universe in a Helium Droplet**. Oxford University Press, 2003;